Convolución sobre los enteros y el álgebra de Wiener

Objetivos. Estudiar la convolución sobre el grupo $\mathbb{Z}$, el teorema de convolución y el álgebra de Wiener.

Definición 1 (convolución de dos sucesiones absolutamente sumables)**.** Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Se define la sucesión $a * b \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$(a * b)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k. \tag{1}$$

Proposición 2. *Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces para cada j en $\mathbb{Z}$ la serie (1) converge absolutamente, y la sucesión $a * b$ pertenece a la clase $\ell^1(\mathbb{Z})$.*

Ejemplo 3 (filtros)**.** Sea $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Calcular $a * x$ para cada uno de los siguientes ejemplos:

1. $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0;
2. $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, las demás componentes son 0;
3. $a_{-1} = a_1 = 1$, $a_0 = -2$, las demás componentes son 0.

Proposición 4 (el teorema de convolución sobre el grupo $\mathbb{Z}$)**.** *Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces*

$$F_{\mathbb{Z}}(a * b) = (F_{\mathbb{Z}} a)(F_{\mathbb{Z}} b),$$

esto es, para cada x en $\mathbb{R}$

$$\overset{\smile}{a * b}(x) = \check{a}(x)\check{b}(x).$$

Definición 5 (álgebra de Wiener)**.** Denotamos por $W(\mathbb{R}_{2\pi})$ el conjunto de las funciones de la forma $\check{a}$ con a en $\ell^1(\mathbb{Z})$. Formalmente,

$$W(\mathbb{R}_{2\pi}) = \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \quad \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \check{a} \right\}.$$

El conjunto $W(\mathbb{R})$ se considera con operaciones por puntos.

Proposición 6. $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ *y* $W(\mathbb{R}_{2\pi})$ *son álgebras complejas asociativas conmutativas con identidad. La función $a \mapsto \check{a}$ es un isomorfismo entre estas álgebras.*