Convolución de sucesiones de soporte finito (un tema de análisis armónico)

Egor Maximenko,
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

5 de noviembre de 2024

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es $\mathbb{Z}$.

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es $\mathbb{Z}$.

Dada una sucesión $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, denotamos por $\operatorname{supp}(a)$ su soporte:

$$\operatorname{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z}\colon\ a_j \neq 0\}.$$

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es $\mathbb{Z}$.

Dada una sucesión $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, denotamos por $\operatorname{supp}(a)$ su soporte:

$$\operatorname{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z}\colon\ a_j \neq 0\}.$$

Aclaración.
Para las funciones continuas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,
el soporte se define como la cerradura del conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo.

$$a_j := 1 + (-1)^j \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplo.

$$a_j := 1 + (-1)^j \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

En este ejemplo,

$$\operatorname{supp}(a) =$$

Ejemplo.

$$a_j := 1 + (-1)^j \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

En este ejemplo,

$$\operatorname{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo.

Denotemos por $\mathbf{0}_{\mathbb{Z}}$ la sucesión constante cero.

Ejemplo.

$$a_j := 1 + (-1)^j \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

En este ejemplo,

$$\operatorname{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo.

Denotemos por $\mathbf{0}_{\mathbb{Z}}$ la sucesión constante cero.

$$\operatorname{supp}(\mathbf{0}_{\mathbb{Z}}) =$$

Ejemplo.

$$a_j := 1 + (-1)^j \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

En este ejemplo,

$$\operatorname{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo.

Denotemos por $\mathbf{0}_{\mathbb{Z}}$ la sucesión constante cero.

$$\operatorname{supp}(\mathbf{0}_{\mathbb{Z}}) = \emptyset.$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para $X \subseteq \mathbb{Z}$,

$$X \text{ es finito} \quad \Longleftrightarrow$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para $X \subseteq \mathbb{Z}$,

$$X \text{ es finito} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ acotado} \quad \Longleftrightarrow$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para $X \subseteq \mathbb{Z}$,

$$X \text{ es finito} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ es compacto.}$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \operatorname{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para $X \subseteq \mathbb{Z}$,

$$X \text{ es finito} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ es compacto.}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \quad \operatorname{supp}(a) \text{ es compacto} \right\}$$

Las sucesiones de soporte finito forman un espacio vectorial

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{supp}(a+b)$$

Las sucesiones de soporte finito forman un espacio vectorial

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{supp}(a + b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b),$$

Las sucesiones de soporte finito forman un espacio vectorial

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{supp}(a+b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b), \qquad \operatorname{supp}(\lambda a)$$

Las sucesiones de soporte finito forman un espacio vectorial

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{supp}(a+b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b), \qquad \operatorname{supp}(\lambda a) \subseteq \operatorname{supp}(a).$$

Las sucesiones de soporte finito forman un espacio vectorial

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{supp}(a+b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b), \qquad \operatorname{supp}(\lambda a) \subseteq \operatorname{supp}(a).$$

Proposición

$\mathcal{Q}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Sucesiones básicas

Para cada p en $\mathbb{Z}$,

$$e_p := \left(\delta_{p,j}\right)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Sucesiones básicas

Para cada p en $\mathbb{Z}$,

$$e_p := \left(\delta_{p,j}\right)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Por ejemplo,

$$e_3 = (\ldots, 0, 0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots),$$

Sucesiones básicas

Para cada p en $\mathbb{Z}$,

$$e_p := \left(\delta_{p,j}\right)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Por ejemplo,

$$e_3 = (\ldots, 0, 0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \qquad e_{-2} = (\ldots, 0, -1, 0, \underline{0}, 0, 0, \ldots),$$

donde están subrayadas las componentes con índice 0.

La base canónica de $\mathcal{Q}$

Notamos que

$$\operatorname{supp}(e_p) =$$

La base canónica de $\mathcal{Q}$

Notamos que

$$\mathrm{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

La base canónica de $\mathcal{Q}$

Notamos que

$$\operatorname{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

Proposición

La familia $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es una base ordenada del espacio vectorial $\mathcal{Q}$.

La base canónica de $\mathcal{Q}$

Notamos que

$$\operatorname{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

Proposición

La familia $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es una base ordenada del espacio vectorial $\mathcal{Q}$.

En particular, esta proposición dice que

$$\mathcal{Q} = \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}}).$$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q =$$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_q =$$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,q} =$$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q =$

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q = (\mathbf{0})_q = 0$.

Demostración de la independencia lineal

Sean J un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $(\lambda_p)_{p\in J}$ una familia en $\mathbb{C}$,

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Supongamos que $a = \mathbf{0}$.

Sea $q \in J$. Entonces,

$$a_q = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q = (\mathbf{0})_q = 0$.

Hemos mostrado que $\lambda_q = 0$ para cada q en J.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p :=$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J \end{cases} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J \end{cases} = b_j.$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Denotemos $\operatorname{supp}(b)$ por J. Definimos $(\lambda_p)_{p\in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p\in J} \lambda_p e_p.$$

Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$a_j = \sum_{p\in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p\in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J \end{cases} = b_j.$$

Hemos mostrado que $b = a \in \operatorname{lin}((e_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Convolución de dos sucesiones de soporte finito

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Se define $a * b \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$\boxed{(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k,} \qquad \text{esto es,} \qquad (a * b)_j := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} a_{j-k} b_k.$$

Convolución de dos sucesiones de soporte finito

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Se define $a * b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$\boxed{(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k,} \qquad \text{esto es,} \qquad (a * b)_j := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=-m}^{m} a_{j-k} b_k.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$ y sea $j \in J$. Entonces

$$(a * b)_j = \sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k.$$

Idea de demostración

Sea

$$r := \max_{k \in \mathrm{supp}(b)} |k|.$$

Idea de demostración

Sea

$$r := \max_{k \in \mathrm{supp}(b)} |k|.$$

Para cada m en $\mathbb{N}_0$ con $m \geq r$, obtenemos

Idea de demostración

Sea

$$r := \max_{k \in \operatorname{supp}(b)} |k|.$$

Para cada m en $\mathbb{N}_0$ con $m \geq r$, obtenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} a_{j-k} b_k$$

Idea de demostración

Sea

$$r := \max_{k \in \operatorname{supp}(b)} |k|.$$

Para cada m en $\mathbb{N}_0$ con $m \geq r$, obtenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} a_{j-k} b_k = \sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k.$$

Ejemplos: convolución de sucesiones de soporte finito

Ejercicio. Calcular $a * b$ para

$$a = (\ldots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\ldots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \ldots).$$

Ejemplos: convolución de sucesiones de soporte finito

Ejercicio. Calcular $a * b$ para

$$a = (\ldots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\ldots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \ldots).$$

Ejercicio. Calcular $a * b$ para

$$a = (\ldots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots),$$

$$b = \frac{e_{-1} + e_0 + e_1}{3} = \left(\ldots, 0, \frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, 0, \ldots\right).$$

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Calcular $a * e_3$, donde

$$a = (\ldots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \ldots).$$

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Calcular $a * e_3$, donde

$$a = (\dots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \dots).$$

Ejercicio. Sean $a \in \mathcal{Q}$, $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Calcular $a * e_3$, donde

$$a = (\ldots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \ldots).$$

Ejercicio. Sean $a \in \mathcal{Q}$, $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$. Calcular $a * e_0$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Calcular $a * e_3$, donde

$$a = (\ldots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \ldots).$$

Ejercicio. Sean $a \in \mathcal{Q}$, $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$. Calcular $a * e_0$.

Ejercicio. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Calcular

$$e_p * e_q.$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B :=$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z}:$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z}: \quad \exists p \in A \quad \exists q \in B \quad r = p + q\}.$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z}: \quad \exists p \in A \quad \exists q \in B \quad r = p + q\}.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(a * b) \subseteq \operatorname{supp}(a) + \operatorname{supp}(b).$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es,

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Demostración

Supongamos que $j \in \mathrm{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \mathrm{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \ \text{supp}(a),$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \operatorname{supp}(a), \qquad q \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \operatorname{supp}(a), \qquad q \in \operatorname{supp}(b),$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \operatorname{supp}(a), \qquad q \in \operatorname{supp}(b), \qquad j =$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \operatorname{supp}(a), \qquad q \in \operatorname{supp}(b), \qquad j = p + q \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \operatorname{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \operatorname{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\operatorname{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$.

$$p \in \operatorname{supp}(a), \qquad q \in \operatorname{supp}(b), \qquad j = p + q \in \operatorname{supp}(a) + \operatorname{supp}(b).$$

La convolución es una operación binaria en $\mathcal{Q}$

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces, $a * b \in \mathcal{Q}$.

La convolución es una operación binaria en $\mathcal{Q}$

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces, $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en $\mathcal{Q}$ es asociativa y conmutativa.

La convolución es una operación binaria en $\mathcal{Q}$

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces, $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en $\mathcal{Q}$ es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \qquad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

La convolución es una operación binaria en $\mathcal{Q}$

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces, $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en $\mathcal{Q}$ es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \qquad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

Ejercicio. Encontrar el elemento neutro bajo $*$.

La convolución es una operación binaria en $\mathcal{Q}$

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces, $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en $\mathcal{Q}$ es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \qquad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

Ejercicio. Encontrar el elemento neutro bajo $*$.

Conclusión: $\mathcal{Q}$ con la operación $*$ es un álgebra compleja conmutativa con identidad.

Ejercicio. Sean

$$a = (\dots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \dots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\dots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \dots).$$

Calcular $a * b * b$ de dos maneras equivalentes:

$$(a * b) * b, \qquad a * (b * b).$$

Ejercicio. Encontrar a, b en $\mathcal{Q}$ tales que

$$\operatorname{supp}(a * b) \neq \operatorname{supp}(a) + \operatorname{supp}(b).$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{Q}$,

$$p := \max(\operatorname{supp}(a)), \qquad q := \max(\operatorname{supp}(b)).$$

Calcular $(a * b)_{p+q}$.

Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{Q}$,

$$p := \max(\operatorname{supp}(a)), \qquad q := \max(\operatorname{supp}(b)).$$

Calcular $(a * b)_{p+q}$.

Ejercicio. Determinar si el álgebra $(\mathcal{Q}, *)$ tiene divisores de cero.

Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

Ejercicio. Sea

$$a = e_0 - \frac{1}{2} e_1 = \left(\ldots, 0, \underline{1}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots \right).$$

Demostrar que no existe b en $\mathcal{Q}$ tal que $a * b = e_0$.

Ejercicio. Explicar que $a * b$ se puede definir para a en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y b en $\mathcal{Q}$.