

# Ejemplos de convoluciones

**1. Ejemplo.** Calculemos la convolución  $f * g$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]; \end{cases} \quad g(x) = 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

*Solución.* Como  $\text{Spt}(f) = [0, 1]$  y  $\text{Spt}(g) = [0, 1]$ ,  $\text{Spt}(f * g) \subseteq [0, 2]$ . Por eso, tenemos que calcular  $(f * g)(x)$  sólo para  $x \in [0, 2]$ .

Sea  $x \in [0, 2]$ . Usamos la fórmula para  $g$ , el cambio de variable  $z = x - y$ , luego la fórmula para  $f$ :

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x - y) dy = \int_{x-1}^x f(z) dz = \int_{\substack{x-1 \leq z \leq x \\ 0 \leq z \leq 1}} z dz = \int_{\text{máx}(0, x-1) \leq z \leq \text{mín}(x, 1)} z dz.$$

Notemos que

$$\text{máx}(0, x - 1) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ x - 1, & x \geq 1; \end{cases} \quad \text{mín}(x, 1) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

El punto “crítico” es 1.

Caso  $0 \leq x \leq 1$ :

$$(f * g)(x) = \int_0^x z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Caso  $1 \leq x \leq 2$ :

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^1 z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{x-1}^1 = \frac{1}{2} (2x - x^2) = -\frac{1}{2} (x - 2)x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x - 1)^2.$$

La función  $f * g$  debe ser continua porque  $f \in L^1$  y  $g \in L^\infty \cap C$ . Es fácil ver que  $f * g$  efectivamente es continua en todos los puntos de  $\mathbb{R}$ , incluyendo los puntos 0, 1, 2.  $\square$

**2.**  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$

**3.**  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2, 2]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]; \end{cases} \quad g = 1_{[-1,1]}.$

4.  $f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$

5.  $f = g = 1_{[0,1]}$ .

6.  $f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$