El álgebra de convolución $\ell^1(\mathbb{Z})$ y el álgebra de Wiener (un tema de análisis armónico)

Egor Maximenko,
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

29 de octubre de 2024

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Lema

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k| = \|a\|_1\,\|b\|_1 < +\infty.$$

Más aún, para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k| < +\infty.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| \, |b_k|.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0, podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0, podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Hacemos el cambio de variable $q = j - k$:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} |a_q|\,|b_k| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} |a_q|\right) = \|b\|_1\,\|a\|_1 < +\infty.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0, podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Hacemos el cambio de variable $q = j - k$:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} |a_q|\,|b_k| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|\right) \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} |a_q|\right) = \|b\|_1\,\|a\|_1 < +\infty.$$

Como $S < +\infty$, para cada j en $\mathbb{Z}$ obtenemos $\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k| < +\infty.$

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Dadas a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $a * b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Dadas a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $a * b \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Gracias al lema, la serie converge de manera absoluta.

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces, $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces, $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 =$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces, $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces, $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| \, |b_k|.$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces, $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|\,|b_k|.$$

Por el lema, la última expresión es $\|a\|_1 \|b\|_1$.

Propiedades algebraicas de la convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Propiedades algebraicas de la convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$a * b = b * a.$$

Convolución y sucesiones básicas

Para cada q en $\mathbb{Z}$, denotemos por q a la sucesión

$$e_q := \left(\delta_{j,q}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

Convolución y sucesiones básicas

Para cada q en $\mathbb{Z}$, denotemos por q a la sucesión

$$e_q := \left(\delta_{j,q}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

Ejercicio. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$e_p * e_q = e_{p+q}.$$

Convolución y sucesiones básicas

Para cada q en $\mathbb{Z}$, denotemos por q a la sucesión

$$e_q := \left(\delta_{j,q}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

Ejercicio. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$e_p * e_q = e_{p+q}.$$

Ejercicio. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$a * e_0 = a.$$

Álgebras de Banach

Sea $\mathcal{A}$ un espacio de Banach complejo y al mismo tiempo un álgebra compleja asociativa.
Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach,
si la norma en $\mathcal{A}$ tiene propiedad submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}.$$

Álgebras de Banach

Sea $\mathcal{A}$ un espacio de Banach complejo y al mismo tiempo un álgebra compleja asociativa.
Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach,
si la norma en $\mathcal{A}$ tiene propiedad submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}.$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ con la operación $*$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \mathrm{e}^{k \, \mathrm{i} \, x} \, .$$

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \mathrm{e}^{k \mathrm{i} x}.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\widehat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) \, \mathrm{e}^{-k \mathrm{i} x} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\widehat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Sabemos que si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a$, entonces $a = \widehat{f}$.

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \,.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\widehat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) \, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Sabemos que si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a$, entonces $a = \widehat{f}$.

Corolario: la función $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ es inyectiva.

El teorema de convolución para el grupo $\mathbb{Z}$

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces,

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a)\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(b).$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \; =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \;=\; \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a * b)_j \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a*b))(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}}(a*b)_j\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k\, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_b Z(a*b))(x) =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a * b)_j \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_b Z(a * b))(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x} =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a * b)_j \,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_b Z(a * b))(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} a_q b_k \,\mathrm{e}^{q\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a * b)_j \,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_b Z(a * b))(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} a_q b_k \,\mathrm{e}^{q\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Obtenemos $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x)\,(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} b)(x)$.

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) \; = \; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a*b)_j \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \; = \; \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x} \, .$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_b Z(a * b))(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in\mathbb{Z}} a_q b_k \, \mathrm{e}^{q\,\mathrm{i}\,x} \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \, .$$

Obtenemos $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a)(x) \, (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} b)(x)$.

Ejercicio: justificar el cambio del orden de las sumas.

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}\left[\ell^1(\mathbb{Z})\right] =$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}[\ell^1(\mathbb{Z})] = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}: \quad \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a\}.$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}\left[\ell^1(\mathbb{Z})\right] = \left\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \quad \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a\right\}.$$

Notamos que para cada f en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, existe una única sucesión a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a.$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}[\ell^1(\mathbb{Z})] = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}: \quad \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a\}.$$

Notamos que para cada f en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, existe una única sucesión a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a.$$

La norma en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se hereda de $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a\|_W := \|a\|_1.$$

Ejercicio.

Sea $q \in \mathbb{Z}$. Calcular $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} e_q$.

Ejercicio.

Sea $q \in \mathbb{Z}$. Calcular $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} e_q$.

Ejercicio.

Explicar la definición de otra forma del álgebra de Wiener: $W(\mathbb{T})$.

Ejercicio.

Demostrar que $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Indicación: usar el hecho que $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio de Banach,
pero no usar las propiedades algebraicas de la convolución.

Ejercicio.

Demostrar que $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Indicación: usar el hecho que $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio de Banach,
pero no usar las propiedades algebraicas de la convolución.

Ejercicio.

Demostrar las propiedades algebraicas de la convolución,
usando el resultado del ejercicio anterior.

Álgebra de convolución $\leftrightarrow$ álgebra de Wiener

álgebra	$\ell^1(\mathbb{Z})$	$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$
operación	$*$	mul. punto a punto
norma	$\|\cdot\|_1$	$\|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a\|_W = \|a\|_1$
identidad	e_0	$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.
- $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, las demás componentes son 0.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.
- $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, las demás componentes son 0.
- $a_{-1} = a_1 = 1$, $a_0 = -2$, las demás componentes son 0.

¿Cómo invertir los elementos de $\ell^1(\mathbb{Z})$?

Ejercicio. Consideremos la siguiente sucesión:

$$a = e_0 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_{-1}.$$

En otras palabras,

$$a = \left(\ldots,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \ldots\right).$$

Calcular $f := \mathcal{F}_Z a$. Calcular $g := \mathbb{1}_{\mathbb{R}}/f$.

Descomponer g en fracciones elementales.

Encontrar b en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que $g = \mathcal{F}_Z b$. Verificar que $a * b = e_0$.

Teorema de Wiener (sin demostración)

Teorema

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tal que la función $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} a$ no se anula.

Entonces, existe b en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que $a * b = e_0$.

Otra forma equivalente.

Teorema

Sea $f \in W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que f no se anula.

Entonces, existe g en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $f\,g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.

Una manera de demostración: usar elementos de la teoría de Gelfand (trabajar con los caracteres del álgebra).