Convolución entre espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$

1. Desigualdad de Hölder. Sean $p, p^* > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, y sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p^*}.$$

2. Desigualdad de Hölder generalizada: ejemplo. $\|fgh\|_1 \le \|f\|_3 \|g\|_4 \|h\|_{\frac{12}{5}}$.

Demostración. Queremos aplicar la desigualdad de Hölder a las funciones fg y h:

$$\|fg\|_1 \le \|fg\|_{\frac{12}{7}} \|h\|_{\frac{12}{5}}.$$

Vamos a demostar que $\|fg\|_{\frac{12}{7}} \le \|f\|_3 \|g\|_4$. Notemos que

$$|f|^{\frac{12}{7}} = \left(|f|^3\right)^{\frac{4}{7}}, \qquad |g|^{\frac{12}{7}} = \left(|g|^4\right)^{\frac{3}{7}}.$$

Por lo tanto,

$$\|fg\|_{\frac{12}{7}}^{\frac{12}{7}} = \||f|^{\frac{12}{7}} |g|^{\frac{12}{7}}\|_1 = \| \left(|f|^3\right)^{\frac{4}{7}} \left(|g|^4\right)^{\frac{3}{7}} \|_1 \le \||f|^3\|_1^{\frac{4}{7}} \||g|^4\|_1^{\frac{3}{7}} = \|f\|_3^{\frac{12}{7}} \|g\|_4^{\frac{12}{7}}. \qquad \square$$

3. Desigualdad de Hölder generalizada. Sean $r \ge 2$, $p_1, \ldots, p_r > 1$ tales que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} = 1$, y sean $f_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le k \le r$. Entonces $f_1 \ldots f_r \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f_1 \cdot \cdots \cdot f_r\|_1 \le \|f_1\|_{p_1} \cdot \cdots \cdot \|f_r\|_{p_r}.$$

Demostración. La idea de la demostración: por inducción. Apliquemos la desigualdad de Hölder a las funciones $f_1 \cdot \cdots \cdot f_{r-1}$ y f_r:

$$\|f_1 \cdot \cdots \cdot f_{r-1} \cdot f_r\|_1 \le \|f_1 \cdot \cdots \cdot f_r\|_{p_r^*} \|f_r\|_{p_r},$$

donde p_r^* definido por $\dfrac{1}{p_r^*} + \dfrac{1}{p_r} = 1$.

Nos falta probar que

$$\|f_1 \cdot \cdots \cdot f_{r-1}\|_{p_r^*} \le \|f_1\|_{p_1} \cdot \cdots \cdot \|f_{r-1}\|_{p_{r-1}}. \tag{1}$$

Definamos $q_1, \ldots, q_{r-1}$ por $q_k := p_k / p_r^*$. Entonces

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_{r-1}} = p_r^* \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{r-1}} \right) = p_r^* \left(1 - \frac{1}{p_r} \right) = 1.$$

Consideremos $\|f_1 \cdot \cdots \cdot f_{r-1}\|_{p_r^*}^{p_r^*}$:

$$\left\| \prod_{k=1}^{r-1} f_k \right\|_{p_r^*}^{p_r^*} = \left\| \prod_{k=1}^{r-1} |f_k|^{p_r^*} \right\|_1 = \left\| \prod_{k=1}^{r-1} \left(|f_k|^{p_k}\right)^{1/q_k} \right\|_1.$$

Usemos la hipótesis de la inducción:

$$\left\| \prod_{k=1}^{r-1} (|f_k|^{p_k})^{1/q_k} \right\|_1 \le \prod_{k=1}^{r-1} \left\| (|f_k|^{p_k})^{1/q_k} \right\|_{q_k} = \prod_{k=1}^{r-1} \| |f_k|^{p_k} \|_1^{1/q_k}$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{r-1} \| |f_k|^{p_k} \|_1^{1/p_k} \right)^{p_r^*} = \left(\prod_{k=1}^{r-1} \| f_k \|_{p_k} \right)^{p_r^*},$$

y la desigualdad (1) esta verificada. □

4. Teorema. Sean $p, q \ge 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Definamos r por $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

1. Para casi todos $x \in \mathbb{R}^n$ la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable.
2. $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$.
3. $f * g = g * f$ c.t.p.
4. $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$ (desigualdad de Young).

Demostración. 1. Caso $p > 1$, $q > 1$. Escribamos

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \, (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \, (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$

Definamos β y γ por: $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$. Entonces $\frac{1}{r} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$, y por la desigualdad de Hölder generalizada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$
$$\le ((|f|^p * |g|^q)(x))^{\frac{1}{r}} \, \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}.$$

De allí,

$$|(f*g)(x)|^r \le (|f|^p * |g|^q)(x) \, \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q},$$

y

$$\|f*g\|_r^r = \||f*g|^r\|_1 \le \||f|^p * |g|^q\|_1 \, \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q}$$
$$\le \|f\|_p^p \, \|g\|_q^q \, \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q} = \|f\|_p^r \, \|g\|_q^r.$$

2. El caso $p = 1$. En este caso $r = q$,

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = (|f(x-y)||g(y)|^q)^{\frac{1}{q}} \, (|f(x-y)|)^{1-\frac{1}{q}}.$$

Integremos por y y apliquemos la desigualdad de Hölder:

$$(|f| * |g|)(x) \le ((|f| * |g|^q)(x))^{1/q} \; \|f\|_1^{1-\frac{1}{q}}.$$

De allí

$$(|f| * |g|)(x))^q \le (|f| * |g|^q)(x) \|f\|_1^{q-1}.$$

Ahora integremos con respecto a x:

$$\||f| * |g|\|_q^q = \|f\|_1 \, \|g\|_q^q \, \|f\|_1^{q-1} = \|f\|_1^q \, \|g\|_q^q.$$

□

5. Tarea. Considerar el caso $p > 1$, $q = 1$.

6. Corolario. La aplicación $(f, g) \mapsto f * g$ es una aplicación bilineal continua de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ en $L^r(\mathbb{R}^n)$.

7. El caso $g = 1$ (convolución como operador lineal acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$). Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \, \|g\|_1$.

Ahora queremos considerar el caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e. $q = p^*$. En este caso debemos poner $r = \infty$.

8. Lema. Sean $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces la aplicación $\mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n)$, definida por $t \mapsto f_t$, donde $f_t(x) = f(x - t)$, es continua.

Idea de la demostración. Primero, probar la afirmación para funciones continuas de soporte compacto. En el caso general, aproximar (en el sentido de L^p la función f por funciones continuas de soporte compacto. □

9. Proposición. Sea $1 \le p \le \infty$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (no, como antes, para casi todo) existe

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy.$$

Se tiene $f * g = g * f$, $\quad f * g$ es una función medible acotada y

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \, \|g\|_{p^*}.$$

La función $f * g$ es uniformemente continua.

Demostración. Para probar que $\|(f * g)(x)\| \le \|f\|_p \, \|g\|_{p^*}$, apliquemos la desigualdad de Hölder a las funciones $y \mapsto f(x - y)$, $y \mapsto g(y)$.

Demostremos que $f * g$ es uniformemente continua.

$$|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| \le \|f\|_p \|g_{x_1} - g_{x_2}\|_{p^*},$$

donde $g_t(y) := g(t + y)$. Se sabe que $t \mapsto g_t$ es una aplicación uniformemente continua de $\mathbb{R}^n$ en L^{p^*}. □

10. Lema. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Entonces

$$\lim_{M\to\infty} \int\limits_{|x|>M} |f(x)|^p \, dx = 0.$$

Demostración. Usar el teorema de Lebesgue. $\square$

11. Proposición. Sean $p \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} (f * g)(x) = 0.$$

Demostración. Para $M > 0$, usando la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int\limits_{|y|\leq M} |f(x-y)g(y)| \, dy + \int\limits_{|y|>M} |f(x-y)g(y)| \, dy \\ &\leq \|g\|_{p^*} \left(\int\limits_{|y|\leq M} |f(x-y)|^p \, dy \right)^{1/p} + \|f\|_p \left(\int\limits_{|y|>M} |g(y)|^{p^*} \, dy \right)^{1/p^*}. \end{aligned}$$

Elegimos $M > 0$ y $R > 0$ tales que

$$\left(\int\limits_{|y|>M} |g(y)|^{p^*} \, dy \right)^{1/p^*} < \varepsilon, \qquad \left(\int\limits_{|z|>M} |f(z)|^p \, dz \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Entonces para $x > M + R$ se tiene $|(f * g)(x)| \leq \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_{p^*})$. $\square$

12. Proposición. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Entonces $\lim_{x\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

Demostración. Como en la proposición anterior, usando la disigualdad:

$$|(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \int\limits_{|y|\leq M} |f(x-y)| \, dy + \|f\|_1 \sup_{|y|>M} |g(y)|.$$

$\square$

13. Lema. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0; \end{cases}$$

es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

14. Proposición (existen funciones de clase C^∞ de soporte compacto). Por ejemplo,

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

15. Proposición. Sea $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \colon \mathbb{R}^n \to K$ una función de clase C^r de soporte compacto, $r \geq 1$. Entonces $f * g$ es una función de clase C^∞. Si además $D := \partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, donde $k \leq r$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [1, n]$, entonces

$$D(f * g) = f * Dg.$$