Convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición de convolución. La convolución de dos funciones medibles $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se define por la siguiente fórmula:

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Aquí se supone que la integral existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. En esta sección vamos a demostrar que $f * g$ está bien definida y pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Lema. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Entonces la función $H\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por $H(x, y) := f(x-y)g(y)$ también es medible.

2. Lema. Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\lambda(A + x_0) = \lambda(A)$ y $\lambda(x_0 - A) = \lambda(A)$.

3. Lema. Sean $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x-x_0)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x)\,dx$.

4. Lema. Sean $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x_0-x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x)\,dx$.

Segunda definición de convolución (equivalente a la primera).

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.$$

5. Norma de convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

1. La integral $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ existe para casi todos $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} f * g = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} g$.
4. $\|f * g\|_1 \le \||f| * |g|\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Demostración. Lemas anteriores, teoremas de Tonelli y Fubini. $\square$

6. Propiedades algebráicas de la operación de convolución. Consideremos la convolución como una operación binaria en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. La convolución es bilineal:

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(f * h), \qquad f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h).$$

2. La convolución es asociativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$.

3. La convolución es conmutativa: $f * g = g * f$.

Demostración. Asociatividad.

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - u - v) g(v) h(u) dv \right) du = \begin{bmatrix} x, u \text{ fijos} \\ w = u + v \\ v = w - u \end{bmatrix} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - w) g(w - u) h(u) dw \right) du = (f * (g * h))(x).\end{aligned}$$

Conmutatividad.

$$\begin{aligned}(g * f)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x - y) f(y)\, dy = \begin{bmatrix} x \text{ fijo} \\ z = x - y \\ y = x - z \end{bmatrix} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z) f(x - z)\, dz = (f * g)(x).\end{aligned}$$

□