Conjuntos convexos (repaso)

Objetivos. Repasar la noción de conjunto convexo en un espacio vectorial real.

Requisitos. Espacios vectoriales, combinaciones lineales.

1. Definición (combinación convexa). Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores del espacio V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k,$$

donde $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, se llama *combinación convexa* de los vectores $v_1, \ldots, v_m$.

2. Definición (conjunto convexo). Sea V un espacio vectorial real. Un conjunto $A \subset V$ se llama *convexo* si para todo par de vectores $a, b \in A$ y todo par de escalares $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$, el vector $\lambda a + \mu b$ también pertenece al conjunto A.

Suponemos que V es un espacio vectorial real.

3. Proposición: la intersección de conjuntos convexos es convexa. Sea $\{A_i\}_{i \in J}$ una familia de subconjuntos convexos de V. Entonces la intersección $\bigcap_{i \in J} A_i$ también es convexa.

4. Proposición: un conjunto convexo contiene todas las combinaciones convexas de sus elementos. Sea $A \subset V$ un conjunto convexo, sean $v_1, \ldots, v_m \in A$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ tales que $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k \in A.$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre m. Note que para $\alpha_3 \neq 1$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3) \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2 \right) + \alpha_3 v_3. \qquad \square$$

5. Definición (envolvente convexa o envoltura convexa de un conjunto). Sea $X \subset V$. La *envolvente convexa* (o *envoltura convexa*) de X es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los elementos de X:

$$\operatorname{conv}(X) \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k \colon \quad m \in \{1, 2, \ldots\}, \quad v_1, \ldots, v_m \in X, \right.$$
$$\left. \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}.$$

6. Propiedad monótona de la envoltura convexa. Sean $X \subset Y \subset V$. Entonces $\operatorname{conv}(X) \subset \operatorname{conv}(Y)$.

7. Comparación del conjunto y su envoltura convexa. Sea $X \subset V$. Entonces $X \subset \operatorname{conv}(X)$.

8. Criterio de convexidad de un conjunto en términos de su envoltura convexa. Sea $X \subset V$. Entonces X es convexo si y sólo si $\operatorname{conv}(X) = X$.

9. Teorema: la envoltura convexa de un conjunto es el mínimo entre todos los conjuntos convexos que lo contienen. Sea $X \subset V$. Entonces:

1. $\operatorname{conv}(X)$ es convexo.
2. $X \subset \operatorname{conv}(X)$.
3. Si $A \subset V$ es un conjunto convexo tal que $X \subset A$, entonces $\operatorname{conv}(X) \subset A$.

10. Envolutura convexa como una intersección. Sea $X \subset V$. Entonces

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \big\{ A \subset V \colon \quad A \text{ es convexo} \quad \wedge \quad X \subset A \big\}.$$

11. La operación "envoltura convexa" tiene propiedad idempotente. Sea $X \subset V$. Entonces

$$\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{conv}(X).$$

Subconjuntos convexos del eje real

12. Proposición. Sea X un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}$. Denotamos por a y b al ínfimo y supremo del conjunto X, respectivamente (notemos que $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$):

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Entonces $(a, b) \subset X$.

13. Proposición (los subconjuntos convexos del eje real son los intervalos). Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo, esto es, tiene una de las siguientes formas (con algunos a y b reales):

$$\mathbb{R}, \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty), \quad [a, +\infty), \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b).$$