Funciones convexas de una variable real

Objetivos. Estudiar criterios de las funciones convexas de una variable real: en términos de las diferencias divididas del primer orden, en términos de las diferencias divididas del segundo orden, en términos de la primera derivada, en términos de la segunda derivada.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas, subconjuntos convexos del eje real, funciones crecientes, funciones convexas, teorema del valor medio.

1. Definición (función convexa de una variable real). Sea I un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, esto es un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es llamada *convexa* si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in I$ y todo par de números $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$,

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \tag{1}$$

2. Observación. Si $x_1 = x_2$ o $\lambda \in \{0, 1\}$, entonces la desigualdad (1) se convierte en una igualdad trivial que se cumple para toda función f. Por lo tanto en la definición de función convexa se puede suponer que $x_1 \neq x_2$ y $\lambda \in (0, 1)$.

Funciones convexas y diferencias divididas

3. Definición (diferencias divididas de una función). Sea $I \subset \mathbb{R}$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Las diferencias divididas de primer orden de f se definen mediante la regla:

$$\Delta_f(x_1, x_2) \coloneqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Diferencias divididas de segundo orden:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \coloneqq \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

4. Ejercicio. Muestre que $\Delta_f(x_1, x_2)$ se escribe como la siguiente combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, con coeficientes dependientes solamente de x_1 y x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{2}$$

Deduzca de (2) que $\Delta_f(x_1, x_2)$ es simétrica respecto a sus argumentos x_1 y x_2.

5. Ejercicio. Muestre que $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ se puede escribir como una combinación lineal de $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, con coeficientes dependientes solamente de x_1, x_2, x_3. Demuestre que $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es simétrica respecto a sus argumentos x_1, x_2, x_3.

6. Lema. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Entonces las siguientes desigualdades son equivalentes:

(a) $f(x_2) \le \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$.

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.

7. Lema. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Sean

$$\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \qquad \beta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3$.

8. Lema. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Sea

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$, $\alpha = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $\beta = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$.

9. Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer orden). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa $\smile$;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

10. Explique el sentido geométrico de las desigualdades del ejercicio anterior.

11. Criterio de la convexidad de una función en términos de las diferencias divididas del segundo orden. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos puntos diferentes $x_1, x_2, x_3 \in I$.

Funciones convexas y derivadas unilaterales

12. Definición (derivadas unilaterales). Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $x \in I$.

1. Si x no es extremo izquierdo de I, entonces la *derivada izquierda* de f en x se define como el siguiente límite:
$$f'_{izq}(x) := \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$
2. Si x no es extremo derecho de I, entonces la *derivada derecha* de f en x se define como el siguiente límite:
$$f'_{der}(x) := \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

13. Derivadas laterales de una función convexa. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Denotemos por a y b los extremos de I:
$$a := \inf(I), \qquad b := \sup(I).$$
Entonces:

1. Si $x \in I \setminus \{a\}$, entonces existe $f'_{izq}(x) \in (-\infty, +\infty]$ y
$$f'_{izq}(x) = \sup_{t<x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$
2. Si $x \in I \setminus \{b\}$, entonces existe $f'_{der}(x) \in [-\infty, +\infty)$ y
$$f'_{der}(x) = \inf_{t>x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$
3. Si x es un punto interior de $\int(I)$, entones existen ambas derivadas parciales $f'_{izq}(x)$ y $f'_{der}(x)$, son finitas y
$$f'_{izq}(x) \le f'_{der}(x).$$
4. f'_{izq} es una función creciente en $I \setminus \{a\}$.
5. f'_{der} es una función creciente en $I \setminus \{b\}$.

14. Recta básica de la gráfica de una función convexa. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea x_0 un punto interior de I. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\forall x \in I \qquad f(x) \ge \alpha(x - x_0) + f(x_0).$$
Indicación: α puede ser cualquier número del intervalo $\alpha \in [f'_{izq}(x), f'_{der}(x)]$. Explique el sentido geométrico.

Criterios de convexidad en términos de las derivadas

15. Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su primera derivada). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en puntos interiores de I. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente en $\operatorname{int}(I)$, esto es,

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{int}(I) \qquad \big(x_1 < x_2\big) \quad \Rightarrow \quad \big(f'(x_1) \le f'(x_2)\big).$$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que f es convexa y demostramos que f' es creciente. Sean $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$. Pongamos $d = x_2 - x_1$. Entonces para todo $h \in (0, d)$ tenemos que $x_1 + h < x_2$ y $x_1 < x_2 - h$. Por el criterio de la convexidad en términos de las diferencias divididas del primer orden,

$$\Delta_f(x_1, x_1 + h) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2 - h, x_2).$$

Además

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_1, x_1 + h), \qquad f'(x_2) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_2, x_2 - h),$$

por lo tanto $f'(x_1) \le f'(x_2)$.

(b)$\Rightarrow$(a). Sean $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Por el teorema del valor medio aplicada a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe un punto $\alpha \in (x_1, x_2) \subset \operatorname{int}(I)$ tal que

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(\alpha).$$

De manera similar existe un $\beta \in (x_2, x_3) \subset \operatorname{int}(I)$ tal que

$$\Delta_f(x_2, x_3) = f'(\beta).$$

Como $\alpha < x_2 < \beta$ y f' crece, obtenemos que $f'(\alpha) \le f'(\beta)$ y

$$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3).$$ □

16. Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y dos veces derivable en $\operatorname{int}(I)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$.

Idea de demostración. Usar el teorema anterior y aplicar el criterio de la función creciente a la función f'. □