Funciones convexas

Objetivos. Estudiar criterios y propiedades de las funciones convexas definidas en subconjuntos convexos de espacios vectoriales reales.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas.

1. Sea V un espacio vectorial, sean $x_1, x_2 \in V$, sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y sea $\mu \in [0, 1]$. Encuentre un punto $(z, w) \in V \times \mathbb{R}$ tal que

$$(z, w) - (x_1, y_1) = \mu\big((x_2, y_2) - (x_1, y_1)\big).$$

2. Definición (función convexa). Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es llamada *convexa* si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in A$ y todo par de números $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$,

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

3. Observación (otra forma de la definición de función convexa). Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es *convexa* si y sólo si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in A$ y todo número $\lambda \in [0, 1]$ se cumple la desigualdad

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

4. Explique el sentido geométrico de la convexidad de una función.

5. Ejercicio. Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = x^2 + y^2$ es convexa.

6. La suma de dos funciones convexas. Sean $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Demuestre que la función $f + g$ es convexa.

7. Un múltiplo positivo de una función convexa. Sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $\alpha \geq 0$. Demuestre que la función αf es convexa.

8. Combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas. Sean $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $f_1, \ldots, f_m\colon V \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$. Demuestre que la función $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k$ es convexa. Por consecuencia, el conjunto de las funciones convexas es un cono convexo.

9. Diferencia de dos funciones convexas. Construya dos funciones convexas $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que su diferencia $f - g$ no es convexa.

Criterio de la convexidad de una función en términos de su epigrafo

10. Definición (epigrafo). Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. El *epigrafo* de la función f es el siguiente subconjunto de $V \times \mathbb{R}$:

$$\operatorname{epi}(f) \coloneqq \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}\colon \quad x \in A, \quad y \ge f(x)\}.$$

11. Ejemplo de epigrafo. Dibuje los epigrafos de las siguientes funciones:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$.

12. Observación. En la definición de epigrafo, V y $\mathbb{R}$ son espacios vectoriales reales. Por lo tanto $V \times \mathbb{R}$ también se puede considerar como un espacio vectorial real, con las operaciones definidas componente a componente:

$$(a, x) + (b, y) \coloneqq (a + b, x + y); \qquad \lambda(a, x) \coloneqq (\lambda x, \lambda x).$$

13. Criterio de que una función es convexa en términos de su epigrafo. Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa.

(b) el epigrafo $\operatorname{epi}(f)$ de la función f es un subconjunto convexo de $V \times \mathbb{R}$.

Desigualdad de Jensen finita

14. Valor de una función convexa en una combinación convexa (desigualdad de Jensen finita). Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $x_1, \ldots, x_m \in A$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$ tales que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$. Entonces

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j).$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre m. Note que si $\lambda_3 < 1$, entonces

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (1 - \lambda_3)\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} x_2\right) + \lambda_3 x_3. \qquad \square$$