

# Funciones convexas

**Objetivos.** Estudiar criterios y propiedades de las funciones convexas definidas en subconjuntos convexos de espacios vectoriales reales.

**Requisitos.** Conjuntos convexos, combinaciones convexas.

En este tema suponemos que  $V$  es un espacio vectorial real.

**1 Ejercicio.** Sean  $x_1, x_2 \in V$ , sean  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  y sea  $\lambda \in [0, 1]$ . Encuentre un punto  $(z, w)$  en  $V \times \mathbb{R}$  tal que

$$(z, w) - (x_1, y_1) = \lambda((x_2, y_2) - (x_1, y_1)).$$

**2 Definición.** Sea  $A$  un subconjunto convexo de un espacio vectorial real  $V$ . Una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *convexa* si para cada par de puntos  $x_1, x_2$  en  $A$  y cada  $\lambda$  en  $[0, 1]$ ,

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

**3 Observación.** Otra forma equivalente: para cada par de puntos  $x_1, x_2$  en  $A$  y cada  $\xi_1, \xi_2 \geq 0$  tales que  $\xi_1 + \xi_2 = 1$ ,

$$f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \leq \xi_1 f(x_1) + \xi_2 f(x_2).$$

**4 Ejercicio.** Explique el sentido geométrico de la convexidad de una función.

**5 Ejercicio.** Demuestre que la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , es convexa.

**6 Ejercicio** (la suma de dos funciones convexas). Sean  $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas. Demuestre que la función  $f + g$  es convexa.

**7 Ejercicio** (un múltiplo positivo de una función convexa). Sea  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y sea  $\alpha \geq 0$ . Demuestre que la función  $\alpha f$  es convexa.

**8 Ejercicio** (combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas). Sean  $m \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $f_1, \dots, f_m: V \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas y  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ . Demuestre que la función  $\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k$  es convexa. Por consecuencia, el conjunto de las funciones convexas es un cono convexo.

**9 Ejercicio** (diferencia de dos funciones convexas). Construya dos funciones convexas  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que su diferencia  $f - g$  no sea convexa.

## Criterio de la convexidad de una función en términos de su epigrafo

**10 Definición** (el epigrafo de una función). Sea  $A$  un subconjunto convexo de un espacio vectorial real  $V$  y sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. El *epigrafo* de la función  $f$  es el siguiente subconjunto de  $V \times \mathbb{R}$ :

$$\text{epi}(f) := \left\{ (x, y) \in V \times \mathbb{R} : x \in A, y \geq f(x) \right\}.$$

**11 Ejercicio.** Dibuje los epigrafos de las siguientes funciones:

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$ .
2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := -|x|$ .

**12 Observación.** En la definición de epigrafo,  $V$  y  $\mathbb{R}$  son espacios vectoriales reales. Por lo tanto,  $V \times \mathbb{R}$  también se puede considerar como un espacio vectorial real, con las operaciones definidas componente a componente:

$$(a, x) + (b, y) := (a + b, x + y); \quad \lambda(a, x) := (\lambda x, \lambda x).$$

**13 Proposición** (criterio de que una función es convexa, en términos de su epigrafo). *Sea  $A$  un subconjunto convexo de un espacio vectorial real  $V$  y sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $f$  es convexa.
- (b) el epigrafo  $\text{epi}(f)$  de la función  $f$  es un subconjunto convexo de  $V \times \mathbb{R}$ .

## Desigualdad de Jensen finita

**14 Proposición** (la desigualdad de Jensen finita, sobre el valor de una función convexa en una combinación convexa). *Sea  $A$  un subconjunto convexo de un espacio vectorial real  $V$  y sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Sean  $m \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $x_1, \dots, x_m \in A$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$  tales que  $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ . Entonces,*

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j f(x_j).$$

*Idea de demostración.* Inducción matemática sobre  $m$ . Note que si  $\lambda_3 < 1$ , entonces

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (1 - \lambda_3) \left( \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} x_2 \right) + \lambda_3 x_3. \quad \square$$