Sucesiones convergentes en espacios métricos

Objetivos. Repasar el concepto del límite de una sucesión en un espacio métrico. Escribir la definición en varias formas equivalentes.

Prerrequisitos. Bolas en espacios métricos, la definición del límite de una sucesión.

Aplicaciones. Descripción de los conceptos topológicos en espacios métricos en términos de sucesiones convergentes.

Suponemos que X es un espacio métrico.

1 Definición. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea b un punto de X. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* al punto b (o que el *límite* de esta sucesión es el punto b) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq m \quad d(a_k, b) < \varepsilon.$$

2 Ejercicio (convergencia de sucesiones constantes)**.** Sean $b \in X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tales que $a_n = b$ para cada n en $\mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

3 Ejercicio (convergencia de sucesiones estacionarias)**.** Sean $b \in X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $m \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \geq m$ se cumple $a_n = b$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

4 Ejercicio (subsucesión de una sucesión convergente)**.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $b \in X$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función escrictamente creciente. Demuestre que $\lim_{k\to\infty} a_{\nu(k)} = b$.

Unicidad del límite

5 Proposición (unicidad del límite de una sucesión, en caso de existencia)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sean b y c puntos de X. Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Entonces $b = c$.

Demostración. Razonando por reducción al absurdo supongamos que $b \neq c$. Entonces $d(b,c) > 0$. Pongamos $r \coloneqq d(b,c)/2$. Entonces $B(b,r) \cap B(c,r) = \varnothing$.

Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, existe m_1 en $\mathbb{N}$ tal que $d(a_n, b) < r$ para cada $n \geq m_1$. De manera similar, como $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, existe m_2 en $\mathbb{N}$ tal que $d(a_n, c) < r$ para cada $n \geq m_2$. Pongamos $n = \max\{m_1, m_2\}$. Entonces $a_n \in B(b,r) \cap B(c,r)$. □

Descripción del límite de una sucesión en términos de colas y vecindades

Recordemos que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión y $m \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{a_k\}_{k\geq m}$ se llama *cola* de la sucesión. Más precisamente, es la cola que empieza con el índice m.

Podemos escribir la definición del límite en otra forma equivalente, usando colas de la sucesión y bolas alrededor del punto límite:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \{a_k\}_{k\geq m} \subseteq B(b,\varepsilon).$$

En vez de las bolas abiertas, uno puede trabajar con vecindades abiertas arbitrarias.

6 Proposición (criterio del límite de una sucesión, en términos de colas de la sucesión y vecindades del punto límite)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea b un punto de X. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall V \in \tau_d(b) \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \{x_k \colon\ k \geq m\} \subseteq V.$$

Demostración. 1. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Sea $V \in \tau_d(b)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b,\varepsilon) \subseteq V$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que $\{x_k\}_{k\geq m} \subseteq B(b,\varepsilon)$. Entonces $\{x_k\}_{k\geq m} \subseteq V$.

2. Supongamos que para cada V en $\tau_d(b)$ existe m en $\mathbb{N}$ tal que $\{x_k\}_{k\geq m} \subseteq V$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $B(b,\varepsilon) \in \tau_d(b)$, y podemos aplicar la hipótesis a esta vecindad abierta de b. □

El medidor de convergencia de una sucesión

7 Definición (el medidor de convergencia de una sucesión a un punto)**.** Sean $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $b \in X$. Definimos $\lambda_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ como el supremo de las distancias del punto b hasta los elementos de la m-ésima cola de la sucesión:

$$\lambda_a(m) \coloneqq \sup_{n\geq m} d(a_n, b).$$

8 Proposición. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$*,* $b \in X$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*;*

(b) $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$*;*

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \lambda_a(m) < \varepsilon$*;*

(d) $\lim_{m\to\infty} \lambda_a(m) = 0$*.*

9 Ejercicio. Demostrar la proposición.