Convergencia de series de vectores ortogonales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de diciembre de 2020

La identidad de Pitágoras en espacios con producto interno (repaso)

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Proposición

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

La identidad de Pitágoras para sumas finitas de vectores ortogonales

Proposición

Para cada m en $\mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=1}^m$ es una lista ortogonal de vectores en H, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

La identidad de Pitágoras para sumas finitas de vectores ortogonales

Proposición

Para cada m en $\mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=1}^m$ es una lista ortogonal de vectores en H, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Demostración: ejercicio (inducción sobre m).

La identidad de Pitágoras para series ortogonales convergentes

Proposición

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que la siguiente serie converge en H:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Demostración

Denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k .$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{k\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Proposición

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Entonces la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Luego para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que la sucesión $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Hemos demostrado el siguiente criterio.

Teorema (criterio de convergencia de series ortogonales)

Sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión ortogonal de vectores en H. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces se tiene la identidad de Pitágoras para series:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Recordemos: una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Recordemos: una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{j,k}.$$

Corolario

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty.$$

Más aún, si estas condiciones se cumplen, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$