Convergencia de series de vectores ortogonales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de febrero de 2023

Objetivos:

- demostrar un criterio de convergencia de series ortogonales,
- demostrar la identidad de Pitágoras para las series ortogonales convergentes.

Objetivos:

- demostrar un criterio de convergencia de series ortogonales,
- demostrar la identidad de Pitágoras para las series ortogonales convergentes.

Prerrequisitos:

- el concepto de convergencia de series en espacios normados,
- la identidad de Pitágoras para dos vectores ortogonales en espacios con producto interno,
- sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos,
- el criterio de Cauchy para la convergencia de series.

Repaso: el criterio de Cauchy para series numéricas

Proposición

Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ converge;

(b) $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall p \geq m \qquad \forall q > p \qquad \left| \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k \right| < \varepsilon.$$

Repaso: el criterio de Cauchy para series numéricas

Proposición

Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ converge;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall p \geq m \qquad \forall q > p \qquad \left| \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k \right| < \varepsilon.$

Idea de demostración: $\quad \beta_p := \sum_{k=1}^{p} \alpha_k,$

$$\sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k$$

Repaso: el criterio de Cauchy para series numéricas

Proposición

Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ converge;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall p \geq m \qquad \forall q > p \qquad \left| \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k \right| < \varepsilon.$

Idea de demostración: $\quad \beta_p := \sum_{k=1}^{p} \alpha_k,$

$$\sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k =$$

Repaso: el criterio de Cauchy para series numéricas

Proposición

Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ converge;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall p \geq m \qquad \forall q > p \qquad \left| \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k \right| < \varepsilon.$

Idea de demostración: $\beta_p := \sum_{k=1}^{p} \alpha_k,$

$$\sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k = \beta_q - \beta_p.$$

Repaso: la identidad de Pitágoras en los espacios con producto interno

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

En algunas proposiciones la completez no es importante.

Repaso: la identidad de Pitágoras en los espacios con producto interno

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

En algunas proposiciones la completez no es importante.

Proposición

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

La identidad de Pitágoras para las sumas finitas de vectores ortogonales

Proposición

Para cada m en $\mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=1}^m$ es una lista ortogonal de vectores en H, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \|x_k\|^2.$$

La identidad de Pitágoras para las sumas finitas de vectores ortogonales

Proposición

Para cada m en $\mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=1}^m$ es una lista ortogonal de vectores en H, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Primera demostración (ejercicio): inducción sobre m. Justificar que $x_{m+1} \perp \sum_{k=1}^m x_k$.

La identidad de Pitágoras para las sumas finitas de vectores ortogonales

Proposición

Para cada m en $\mathbb{N}$, si $(x_k)_{k=1}^m$ es una lista ortogonal de vectores en H, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Primera demostración (ejercicio): inducción sobre m. Justificar que $x_{m+1} \perp \sum_{k=1}^m x_k$.

Segunda demostración (ejercicio): $\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} x_j, \sum_{k=1}^{m} x_k \right\rangle = \ldots$

La identidad de Pitágoras para las series ortogonales convergentes

Proposición

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que la siguiente serie converge en H:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Entonces

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k .$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 =$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 =$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 =$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k .$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

En la última igualdad usamos

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por s_m la m-ésima suma parcial:

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

Supongamos que $t \in H$ y

$$\lim_{m\to\infty} s_m = t.$$

Entonces, por la continuidad de la norma y por la identidad de Pitágoras,

$$\|t\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

En la última igualdad usamos la definición de la suma de la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

Proposición

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Entonces la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas,

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 =$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas,

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 =$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 =$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas,
existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Hemos demostrado que la sucesión $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy para series numéricas, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para p, q con $q > p \geq m$,

$$\sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Pongamos $s_p := \sum_{k=1}^{p} x_k$. Para p, q con $q > p \geq m$, por la identidad de Pitágoras,

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_k - \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Hemos demostrado que la sucesión $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como H es completo, la sucesión converge.

Hemos demostrado el siguiente criterio.

Teorema (el criterio de convergencia de series ortogonales)

Sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión ortogonal de vectores en H. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces se tiene la identidad de Pitágoras para series:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Sucesiones ortonormales

Recordemos: una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Sucesiones ortonormales

Recordemos: una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal si

$$\forall j,k\in\mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{j,k}.$$

Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Demostrar que la sucesión $(\lambda_k a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es ortogonal.

Criterio de convergencia de la serie cuyos sumandos son múltiplos de vectores de una sucesión ortonormal

Corolario

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in \ell^2, \quad \text{esto es,} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty.$$

Más aún, si estas condiciones se cumplen, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Situación cuando se aplica el teorema de Weierstrass sobre la convergencia absoluta

Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H.
Supongamos que $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty.$$

- Demostrar que $\lambda \in (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y concluir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge.
- Justificar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ usando la "M-prueba" de Weierstrass.

Situación cuando no se aplica el teorema de Weierstrass sobre la convergencia absoluta

Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H.
Construir una sucesión numérica $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lambda \in \ell^2 \setminus \ell^1,$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| = +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty.$$

Justificar que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge, aunque no se puede aplicar la "M-prueba" de Weierstrass.