Descripción de varios modos de convergencia en términos de ciertos conjuntos auxiliares

Objetivos. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y sea g una función medible:

$$f_n, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}).$$

Para todo $\varepsilon > 0$ y todos $n, k \in \mathbb{N}$ definamos los siguientes conjuntos:

$$A(\varepsilon, n) \coloneqq \big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\big\},$$

$$B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon).$$

Vamos a demostrar que varios modos de convergencia se describen en términos de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$, D:

$$f_n \xrightarrow{\mu} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{X} g \qquad \iff \qquad D = \varnothing;$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \iff \qquad \mu(D) = 0;$$

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \varnothing;$$

$$f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Requisitos. Definición de varios modos de convergencia, propiedades de medida, funciones medibles.

1. Repase las definiciones de varios modos de convergencia: uniforme, puntual, casi en todas partes, casi uniforme, en medida.

Propiedades de los conjuntos auxiliares

2. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces la sucesión $\big(B(\varepsilon,k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente, esto es,

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad B(\varepsilon,k+1)\subset B(\varepsilon,k).$$

Demostración.

$$B(\varepsilon,k+1)=\bigcup_{n\ge k+1}A(\varepsilon,n)\subset A(\varepsilon,k)\cup\left(\bigcup_{n\ge k+1}A(\varepsilon,n)\right)=\bigcup_{n\ge k+1}A(\varepsilon,n)\subset\bigcup_{n\ge k}A(\varepsilon,n).\ \square$$

3. Sea $n\in\mathbb{N}$. Entonces la familia $\big(A(\varepsilon,n)\big)_{\varepsilon>0}$ es decreciente:

$$\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\qquad(\varepsilon_1<\varepsilon_2)\qquad\Longrightarrow\qquad\big(A(\varepsilon_2,n)\subset A(\varepsilon_1,n)\big).$$

Demostración. Sean $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ tales que $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, y sea $x\in A(\varepsilon_2,n)$. Entonces

$$|f_n(x)-g(x)|\ge\varepsilon_2>\varepsilon_1,$$

así que $x\in A(\varepsilon_1,n)$. $\square$

4. Sea $k\in\mathbb{N}$. Entonces la familia $\big(B(\varepsilon,k)\big)_{\varepsilon>0}$ es decreciente:

$$\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\qquad(\varepsilon_1<\varepsilon_2)\qquad\Longrightarrow\qquad\big(B(\varepsilon_2,k)\subset B(\varepsilon_1,k)\big).$$

Demostración. Para cada $n\ge k$ tenemos que $A(\varepsilon_2,n)\subset A(\varepsilon_1,n)\subset B(\varepsilon_1,k)$. La unión de estos conjuntos $A(\varepsilon_2,n)$ también está contenida en $B(\varepsilon_1,k)$. $\square$

5. La familia $\big(C(\varepsilon)\big)_{\varepsilon>0}$ es decreciente:

$$\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\qquad(\varepsilon_1<\varepsilon_2)\qquad\Longrightarrow\qquad\big(C(\varepsilon_2)\subset C(\varepsilon_1)\big).$$

Demostración. Para cualquier $k\in\mathbb{N}$ tenemos que $C(\varepsilon_2)\subset B(\varepsilon_2,k)\subset B(\varepsilon_1,k)$, por lo tanto $C(\varepsilon_2)$ está contenido en la intersección de estos $B(\varepsilon_1,k)$. $\square$

6. La unión de la familia no numerable $(C(\varepsilon))_{\varepsilon\in(0,+\infty)}$ se puede representar como la unión de una subfamilia *numerable*:

$$\bigcup_{\varepsilon>0}C(\varepsilon)=\bigcup_{p=1}^{\infty}C(1/p).$$

Demostración. La contención $\supset$ es obvia. Por otro lado, si $\varepsilon>0$, entonces ponemos $p=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1$, luego $p>1/\varepsilon$, $\varepsilon<1/p$ y $C(\varepsilon)\subset C(1/p)$. $\square$

Descripción de varios modos de convergencia en términos de los conjuntos auxiliares

7. Proposición (sobre los puntos de no convergencia).

$$D = \bigl\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\to g(x)\bigr\}.$$

Demostración. Para todo $x \in X$ tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
f_n(x) \not\to g(x) \quad &\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \\
&\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in B(\varepsilon, k) \\
&\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) \\
&\iff \quad \exists \varepsilon > 0 \quad x \in C(\varepsilon) \\
&\iff \quad x \in \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon) \\
&\iff \quad x \in D.
\end{aligned}$$

□

8. Corolario (criterio de la convergencia puntual).

$$f_n \xrightarrow{X} g \qquad \iff \qquad D = \varnothing \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad C(\varepsilon) = \varnothing.$$

9. Corolario (criterio de la convergencia casi en todas partes).

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \iff \qquad \mu(D) = 0 \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(C(\varepsilon)) = 0.$$

Criterio de la convergencia uniforme en términos de los conjuntos auxiliares

10. Proposición (criterio de la convergencia uniforme fuera de un conjunto). Sea $E \subset X$. Entonces:

$$f \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) \subset E.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus E \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus E \quad x \notin A(\varepsilon, n). \end{aligned}$$

Simplifiquemos el predicado interior:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \setminus E \quad x \notin A(\varepsilon, n) \quad &\iff \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin E \quad \Longrightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n) \Big) \\ &\iff \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Longrightarrow \quad x \in E \Big) \\ &\iff \quad A(\varepsilon, n) \subset E. \end{aligned}$$

Ahora podemos continuar:

$$\begin{aligned} f \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subset E \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subset E \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) \subset E. \end{aligned}$$

□

11. Corolario (criterio de la convergencia uniforme).

$$f \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Criterio de la convergencia casi uniforme

Recordemos la definición: se dice que f_n *converge a g casi uniformemente* respecto a μ, si para todo $\eta > 0$ existe un conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) \le \eta$ y $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$. La convergencia casi uniforme también se llama la *convergencia de Egórov.*

12. Teorema (criterio de la convergencia casi uniforme).

$$f \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Demostración. $\Longrightarrow$. Supongamos que $f \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos por demostrar que

$$\lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Sea $\delta > 0$. Elijamos un $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$ tal que $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$. Entonces por la Proposición 10 (criterio de la convergencia uniforme fuera de un conjunto),

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k_0) \subset E.$$

De aquí para todo $k \ge k_0$ tenemos $B(\varepsilon, k) \subset B(\varepsilon, k_0) \subset E$ y por lo tanto $\mu(B(\varepsilon, k)) < \delta$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \eta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \eta))) < \eta. \tag{1}$$

Sea $\delta > 0$. Vamos a construir un conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) < \delta$ y $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$. Aplicando (1) con $\varepsilon = \frac{1}{p}$ y $\eta = \frac{\delta}{2^p}$ obtenemos un $k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\delta}{2^p}\right)$ tal que

$$\mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\delta}{2^p}. \tag{2}$$

Pongamos

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostremos que $\mu(E) < \delta$ y $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$. Primero acotemos $\mu(E)$ usando (2) y la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(E) \le \sum_{p=1}^{\infty} \mu(B(1/p, k_p)) < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^p} = \delta.$$

Para demostrar que $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$ usamos la Proposición 10 (criterio de la convergencia uniforme fuera de un conjunto). Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, elijamos un p con $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Mostremos que $B(\varepsilon, k_p) \subset E$:

$$B(\varepsilon, k_p) \subset B(1/p, k_p) \subset E. \qquad \square$$