Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia (un tema del curso "Análisis real")

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

28 de mayo de 2021

Plan

Plan

Objetivos:

mostrar el análisis de varios modos de convergencia para un par de ejemplos de sucesiones de funciones.

Prerrequsitos:

la definición del límite de una sucesión;

el criterio de la convergencia uniforme en términos de la norma-supremo;

criterios de varios modos de convergencia en términos de los conjuntos auxiliares:

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X \colon \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}, \qquad B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k), \qquad D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,

sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) :=$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) \coloneqq$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : \; |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) :=$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X \colon \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D :=$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
sea $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X: \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\implies} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = 0.
\end{aligned}
$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{X} g \iff$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{X} g \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Definiciones y criterios de varios modos de convergencia (repaso)

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff D = \varnothing.$$

$$f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \Longleftrightarrow$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X\setminus E} g \right)$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X \setminus E} g \right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X\setminus E} g\right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X\setminus E} g \right)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \iff$$

$$f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xRightarrow[n\to\infty]{X \setminus E} g \right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu\Big(\{ x \in X \colon \; f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \} \Big) = 0$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \underset{n\to\infty}{\overset{X\setminus E}{\rightrightarrows}} g \right)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \iff \mu\Big(\{ x \in X : \ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \} \Big) = 0$$

$$\iff \mu(D) = 0.$$

$$f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xRightarrow[n\to\infty]{X \setminus E} g \right)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \iff \mu\Big(\{ x \in X \colon \; f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \} \Big) = 0$$

$$\iff \mu(D) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} g \iff$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \underset{n\to\infty}{\overset{X\setminus E}{\rightrightarrows}} g \right)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \iff \mu\Big(\big\{x \in X\colon \ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\big\}\Big) = 0$$

$$\iff \mu(D) = 0.$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

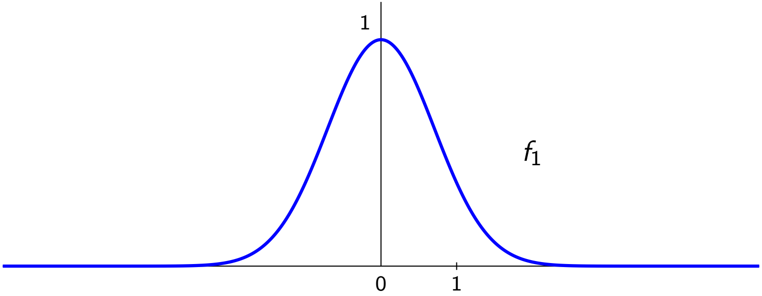
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ B(\varepsilon, k) = \varnothing \end{array}} \arrow[rr] \arrow[d] & & \boxed{\begin{array}{c} f_n \xrightarrow{X} g \\ D = \varnothing \end{array}} \arrow[d] \\
\boxed{\begin{array}{c} f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g \\ \forall\varepsilon > 0,\ \lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0 \end{array}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \boxed{\begin{array}{c} f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \\ \mu(D) = 0 \end{array}} \arrow[ll, dashed, bend right, "\mu(X)<+\infty"'] \\
& \boxed{\begin{array}{c} f_n \xrightarrow{\mu} g \\ \forall\varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0 \end{array}} &
\end{tikzcd}
$$

Plan

Primer ejemplo (similar al núcleo de calor, Gauss–Weierstrass)

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

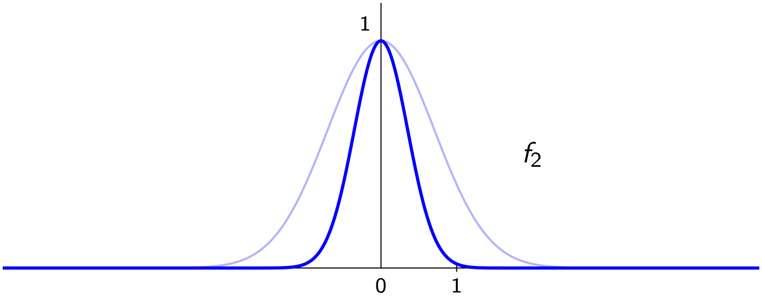
$$f_n(x) = e^{-n^2 x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



Primer ejemplo (similar al núcleo de calor, Gauss–Weierstrass)

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

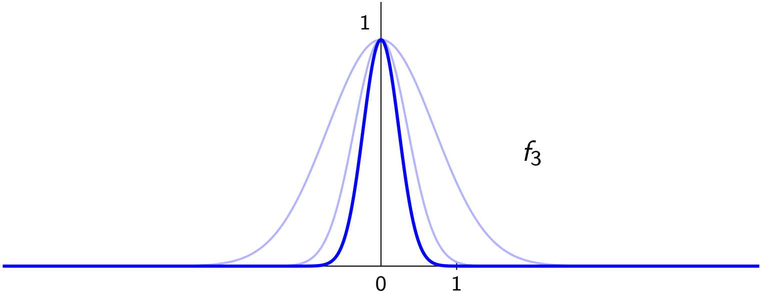
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



Primer ejemplo (similar al núcleo de calor, Gauss–Weierstrass)

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

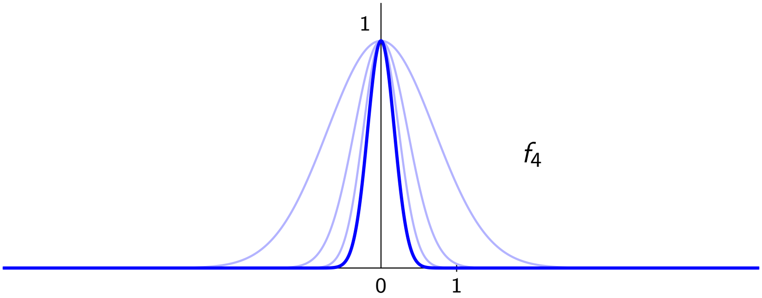
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



Primer ejemplo (similar al núcleo de calor, Gauss–Weierstrass)

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

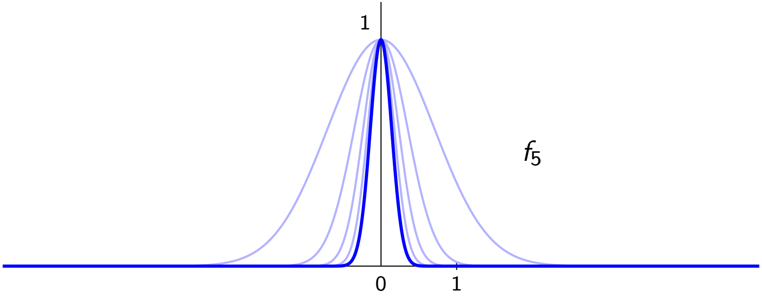
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



Primer ejemplo (similar al núcleo de calor, Gauss–Weierstrass)

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = e^{-n^2 x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.

Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2}\,.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.

Si $x = 0$, entonces

Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2}.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.

Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f_n(x) \to 1$.

Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2}\,.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.

Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f_n(x) \to 1$.

Si $x \neq 0$, entonces

Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2}.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.

Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f_n(x) \to 1$.

Si $x \neq 0$, entonces $-n^2x^2 \to -\infty$ y por eso $f_n(x) \to 0$.

Cálculo del límite puntual

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}.$$

Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$, cuando $n \to \infty$.
Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f_n(x) \to 1$.
Si $x \neq 0$, entonces $-n^2 x^2 \to -\infty$ y por eso $f_n(x) \to 0$. La función límite es

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Las funciones $h_n := |f_n - g|$

$$f_n(x) := e^{-n^2x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Denotemos por h_n a la función $|f_n - g|$:

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| =$$

Las funciones $h_n := |f_n - g|$

$$f_n(x) := \mathrm{e}^{-n^2x^2}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Denotemos por h_n a la función $|f_n - g|$:

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \mathrm{e}^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \mathrm{e}^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Sea $x = 0$. Entonces $h_n(x) = 0$ para cada n en $\mathbb{N}$.

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Sea $x = 0$. Entonces $h_n(x) = 0$ para cada n en $\mathbb{N}$.

Para cada $\varepsilon > 0$ pongamos $k = 1$ y para cada $n \geq k$ obtenemos $h_n(x) < \varepsilon$.

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = e^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \leq$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \leq \mathrm{e}^{-k^2 x^2} <$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2} \leq \mathrm{e}^{-k^2x^2} < \mathrm{e}^{-\log(1/\varepsilon_1)} =$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \leq \mathrm{e}^{-k^2 x^2} < \mathrm{e}^{-\log(1/\varepsilon_1)} = \varepsilon_1 \leq$$

Demostración de la convergencia puntual por la definición del límite

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon, 1\}, \qquad k := \left\lfloor \frac{\sqrt{\log(1/\varepsilon_1)}}{|x|} \right\rfloor + 1.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k$ tenemos

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \leq \mathrm{e}^{-k^2 x^2} < \mathrm{e}^{-\log(1/\varepsilon_1)} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon.$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \mathrm{e}^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x \in \mathbb{R}} h_n(x)$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x \in \mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}}$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2 x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x \in \mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x \geq 0} h_n(x)$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \mathrm{e}^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0), \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2 x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \overset{h_n \text{ es par}}{=\!=\!=} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0),\ \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

$$\overset{h_n\geq 0}{=\!=\!=} \sup_{x>0} h_n(x)$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \overset{h_n \text{ es par}}{=\!=\!=\!=} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0),\ \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

$$\overset{h_n\geq 0}{=\!=\!=} \sup_{x>0} h_n(x) \overset{h_n \searrow}{=\!=\!=}$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0), \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

$$\xlongequal{h_n\geq 0} \sup_{x>0} h_n(x) \xlongequal{h_n\searrow} \lim_{x\to 0^+} h_n(x)$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2 x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x \in \mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x \geq 0} h_n(x) = \max\left\{ h_n(0), \sup_{x > 0} h_n(x) \right\}$$

$$\xlongequal{h_n \geq 0} \sup_{x > 0} h_n(x) \xlongequal{h_n \searrow} \lim_{x \to 0^+} h_n(x) = 1.$$

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0),\ \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

$$\xlongequal{h_n\geq 0} \sup_{x>0} h_n(x) \xlongequal{h_n \searrow} \lim_{x\to 0^+} h_n(x) = 1.$$

Como $\quad \|h_n\|_{\sup} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,\quad$ concluimos que

Análisis de la convergencia uniforme con la norma-supremo

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ e^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\|h_n\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) \xlongequal{h_n \text{ es par}} \sup_{x\geq 0} h_n(x) = \max\left\{h_n(0),\ \sup_{x>0} h_n(x)\right\}$$

$$\xlongequal{h_n\geq 0} \sup_{x>0} h_n(x) \xlongequal{h_n\searrow} \lim_{x\to 0^+} h_n(x) = 1.$$

Como $\|h_n\|_{\sup} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, concluimos que $f_n \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows}} g$.

Cálculo del conjunto $A(\varepsilon, n)$

Es suficiente calcular $A(\varepsilon, n)$ para ε cercanos a cero.

Como las funciones h_n toman valores de 0 a 1, supongamos que $\varepsilon \in (0, 1)$.

Cálculo del conjunto $A(\varepsilon, n)$

Es suficiente calcular $A(\varepsilon, n)$ para ε cercanos a cero.

Como las funciones h_n toman valores de 0 a 1, supongamos que $\varepsilon \in (0, 1)$.

Entonces

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in \mathbb{R} : \ h_n(x) \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \geq \varepsilon\}$$

Cálculo del conjunto $A(\varepsilon, n)$

Es suficiente calcular $A(\varepsilon, n)$ para ε cercanos a cero.

Como las funciones h_n toman valores de 0 a 1, supongamos que $\varepsilon \in (0, 1)$.

Entonces

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in \mathbb{R} \colon \; h_n(x) \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \; \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \geq \varepsilon\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \; x^2 \leq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{n^2}\right\}$$

Cálculo del conjunto $A(\varepsilon, n)$

Es suficiente calcular $A(\varepsilon, n)$ para ε cercanos a cero.

Como las funciones h_n toman valores de 0 a 1, supongamos que $\varepsilon \in (0, 1)$.

Entonces

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, n) &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ h_n(x) \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon\ \mathrm{e}^{-n^2 x^2} \geq \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon\ x^2 \leq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{n^2}\right\} = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right]. \end{aligned}$$

Análisis de la convergencia en medida

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

Para cada ε en $(0, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = \lim_{n\to\infty}$$

Análisis de la convergencia en medida

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

Para cada ε en $(0, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}$$

Análisis de la convergencia en medida

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

Para cada ε en $(0, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n} = 0.$$

Análisis de la convergencia en medida

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n} \right].$$

Para cada ε en $(0, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

En este ejemplo para cada ε en $(0, 1)$ la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) =$$

Cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

En este ejemplo para cada ε en $(0,1)$ la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

En este ejemplo para cada ε en $(0,1)$ la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Notamos que

$$\exists\varepsilon(= 1/2) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) \neq \varnothing.$$

Hemos comprobado que

Cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right].$$

En este ejemplo para cada ε en $(0,1)$ la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Notamos que

$$\exists \varepsilon (= 1/2) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) \neq \varnothing.$$

Hemos comprobado que $\quad f \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows}} g.$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para $\varepsilon \in (0,1)$,

$$B(\varepsilon, k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = \lim_{k\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k} = 0.$$

Por lo tanto, $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$B(\varepsilon, k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$B(\varepsilon,k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k} = 0,$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$B(\varepsilon,k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k} = 0,$$

obtenemos

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \varnothing.$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Hemos mostrado que para cada ε en $(0, 1)$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Hemos mostrado que para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

La familia $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ es decreciente, por eso para $\varepsilon \geq 1$ también obtenemos

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$

Hemos mostrado que para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

La familia $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ es decreciente, por eso para $\varepsilon \geq 1$ también obtenemos $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D =$$

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon) =$$

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Hemos comprobado que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g$.

El cálculo del conjunto D

Hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$,

$$C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Hemos comprobado que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g$. Por consecuencia, $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Conjuntos excepcionales de Egórov

Sea $\eta > 0$. Los incisos anteriores muestran que los conjuntos $B(\varepsilon, k)$ se concentran cerca del punto 0, por eso definimos E como

$$E = \left[-\frac{\eta}{4}, \frac{\eta}{4}\right].$$

Entonces $\mu(E) = \eta/2 < \eta$, y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus E} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x>\eta/4} e^{-n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{n^2\eta^2}{16}\right) = 0,$$

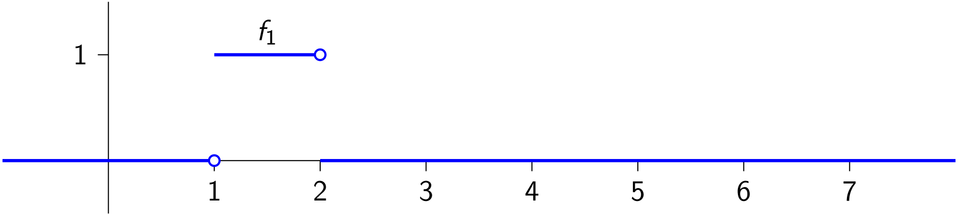
así que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}\setminus E} g$.

Plan

Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

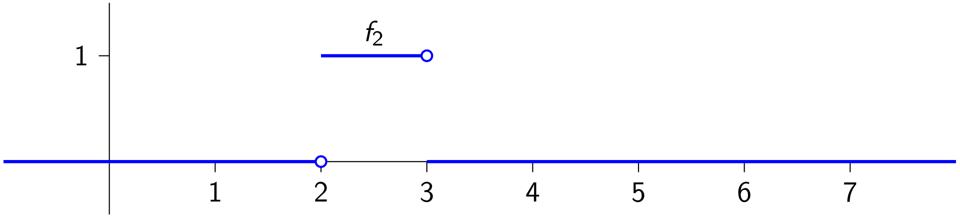
$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

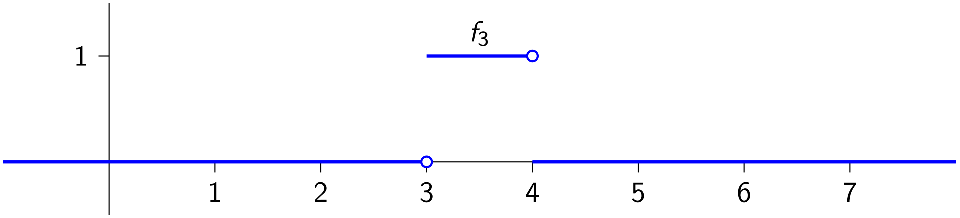
$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

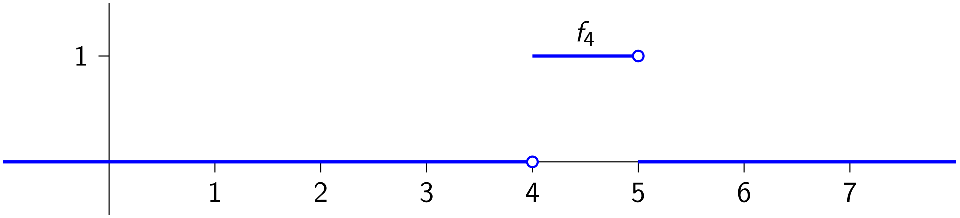
$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

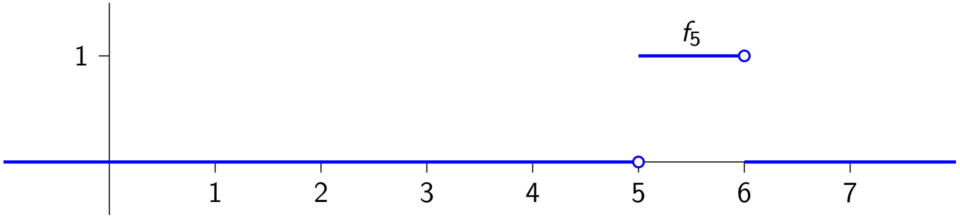
$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

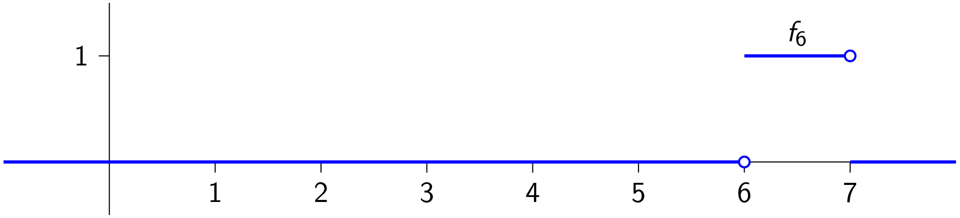
$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



Segundo ejemplo (el tren que no regresa)

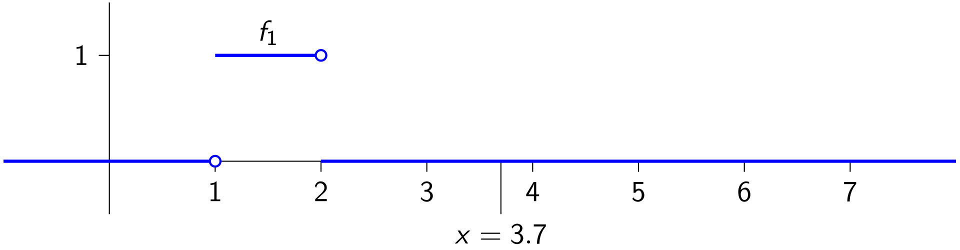
$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n = 1_{[n,n+1)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

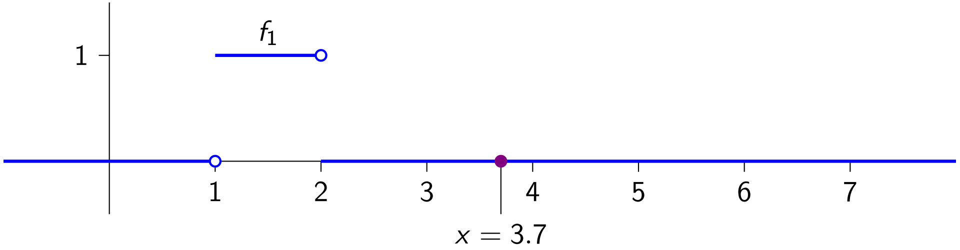
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$f_1(3.7) =$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

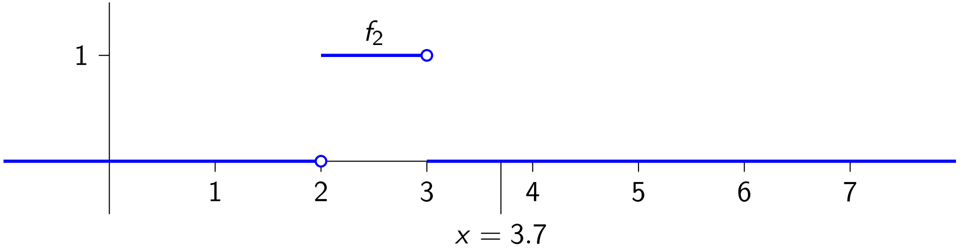
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$f_1(3.7) = 0,$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

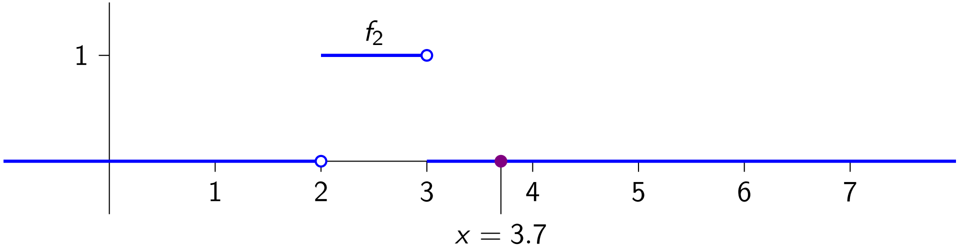
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) =$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

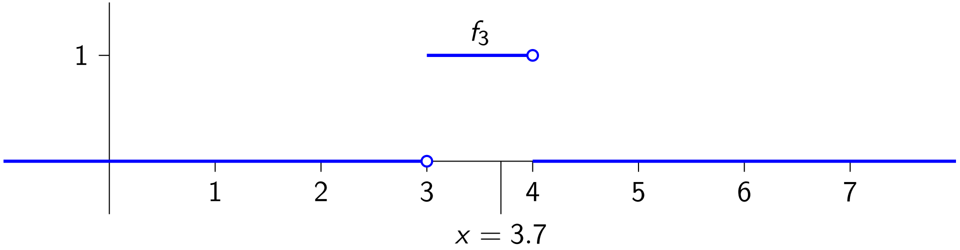
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0,$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

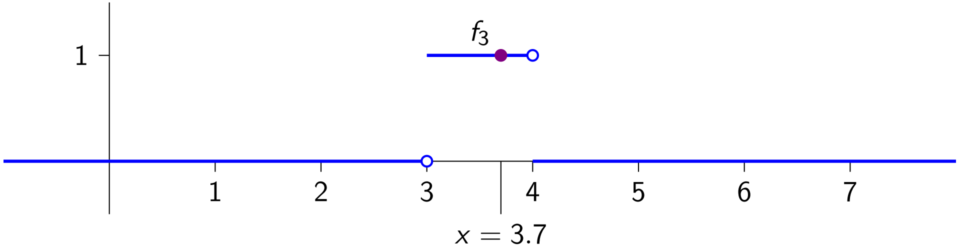
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) =$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

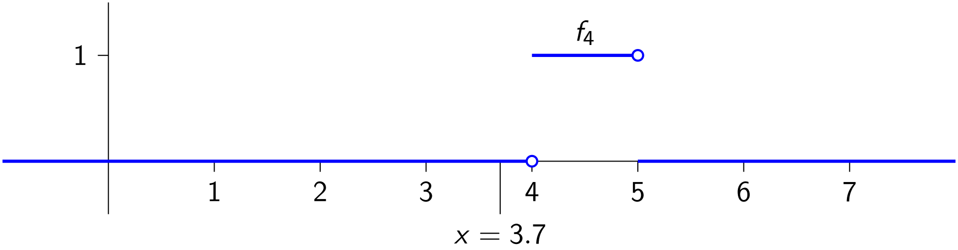
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1,$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

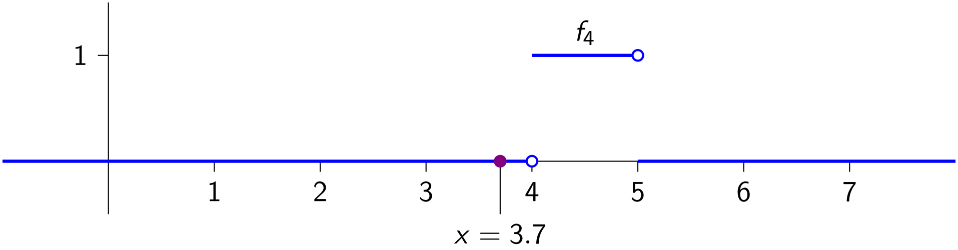
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) =$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

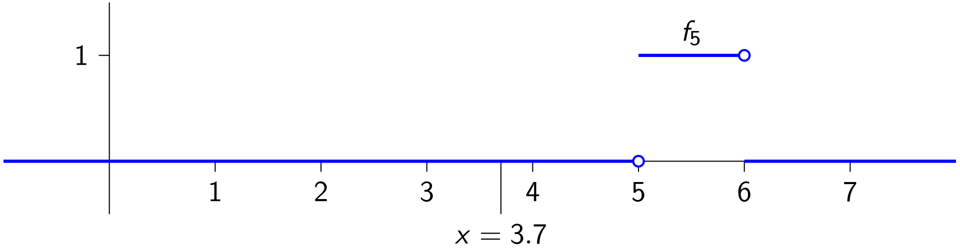
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) = 0,$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

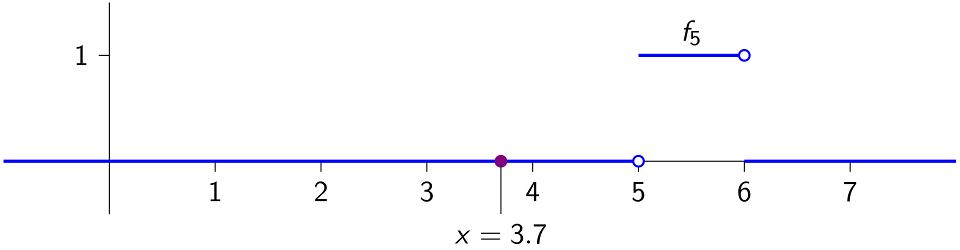
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) = 0, \quad f_5(3.7) =$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

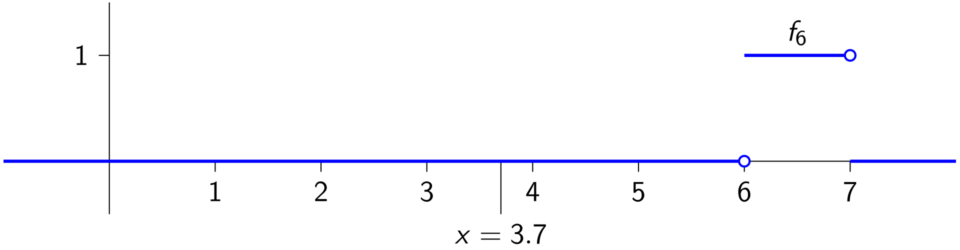
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) = 0, \quad f_5(3.7) = 0,$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

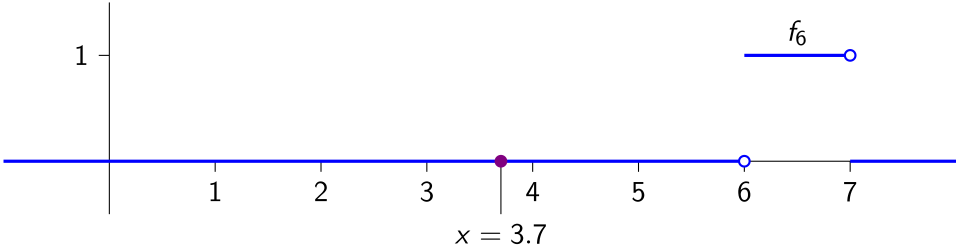
$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) = 0, \quad f_5(3.7) = 0, \quad f_6(3.7) =$$

El comportamiento en un punto, $x = 3.7$

$$f_n = 1_{[n,n+1)}.$$



$$f_1(3.7) = 0, \quad f_2(3.7) = 0, \quad f_3(3.7) = 1, \quad f_4(3.7) = 0, \quad f_5(3.7) = 0, \quad f_6(3.7) = 0.$$

Demostración de la convergencia puntual por definición

Mostremos que para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Definimos

Demostración de la convergencia puntual por definición

Mostremos que para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Definimos

$$k = \max\{1, \lfloor x \rfloor + 1\}.$$

Entonces $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq k$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq k \leq n,$$

así que $x \notin [n, n+1)$ y $f_n(x) = 0$. Por consecuencia, para $n \geq k$

$$|f_n(x) - g(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Análisis de la convergencia uniforme

Definimos
$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)|.$$

En este ejemplo,
$$h_n(x) = f_n(x) = 1_{[n,n+1)}(x).$$

Calculemos $\|h_n\|_{\sup}$. Por un lado, $h_n(x) \le 1$ para cada x en $\mathbb{R}$.
Por otro lado, $h_n(n) = 1$. Luego
$$\|h_n\|_{\sup} = 1.$$

Como $\quad \|h_n\|_{\sup} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0, \quad$ concluimos que $\quad f_n \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows}} g.$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0, 1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) =$$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0, 1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \Big\}$$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0, 1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\right\}$$

$$=$$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0,1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : \ 1_{[n,n+1)}(x) \geq \varepsilon\right\}$$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0, 1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : \ 1_{[n,n+1)}(x) \geq \varepsilon\right\}$$

$$=$$

El cálculo de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$

Para cada ε en $(0,1)$ y cada n en $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, n) &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon\ 1_{[n,n+1)}(x) \geq \varepsilon\right\} \\ &= [n, n+1). \end{aligned}$$

Análisis de la convergencia en medida

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) = [n, n+1), \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) = 1.$$

Para cada ε fijo en $(0,1)$, $\quad \mu(A(\varepsilon, n)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$

Por eso f_n no converge a g en medida.

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) =$$

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n)$$

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) =$$

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) = \bigcup_{n \geq k} [n, n+1)$$

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) = \bigcup_{n \geq k} [n, n+1) =$$

El cálculo de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) = \bigcup_{n \geq k} [n, n+1) = [k, +\infty).$$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = [k, +\infty),$$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = [k, +\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) =$$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = [k, +\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) = +\infty.$$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = [k, +\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) = +\infty.$$

Para cada ε fijo en $(0,1)$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1/2$,

$$\mu(B(\varepsilon, k)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon,k) = [k,+\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon,k)) = +\infty.$$

Para cada ε fijo en $(0,1)$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1/2$,

$$\mu(B(\varepsilon,k)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Luego f_n no converge casi uniformemente a g.

Análisis de la convergencia casi uniforme

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = [k, +\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) = +\infty.$$

Para cada ε fijo en $(0,1)$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1/2$,

$$\mu(B(\varepsilon, k)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Luego f_n no converge casi uniformemente a g.

A la misma conclusión podemos llegar de otra manera:
si no converge en medida, entonces no converge casi uniformemente.

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) =$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) =$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) =$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, +\infty) = \varnothing.$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, +\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El conjunto de no convergencia es

$$D =$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Acabamos de comprobar que

El cálculo de los conjuntos $C(\varepsilon)$ y D

Para cada ε en $(0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, +\infty) = \varnothing.$$

Como $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \searrow$, podemos concluir que para cada $\varepsilon \geq 1$ también $C(\varepsilon) = \varnothing$.

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Acabamos de comprobar que $\quad f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g.$

Plan

Otros ejemplos

Ejemplo 3. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}, \qquad g(x) = 1.$$

Otros ejemplos

Ejemplo 3. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}, \qquad g(x) = 1.$$

Ejemplo 4. $X = [0,1]$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 1_{[1/(n+1),1/n]}, \qquad g(x) = 0.$$

Otros ejemplos

Ejemplo 3. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}, \qquad g(x) = 1.$$

Ejemplo 4. $X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 1_{[1/(n+1),1/n]}, \qquad g(x) = 0.$$

Ejemplo 5. $X = [0, 1)$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = x^n, \qquad g(x) = 0.$$

Otros ejemplos

Ejemplo 6. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$

Otros ejemplos

Ejemplo 6. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$

Ejemplo 7. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = n \cdot 1_{[0,1/n]} = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1/n]. \end{cases}$$

Otros ejemplos

Ejemplo 8. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 1_{[n-1,n+1]}(x) \cdot (1 - |x-n|) = \begin{cases} 1+n-x, & x \in [n, n+1], \\ 1-n+x, & x \in [n-1, n), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [n-1, n+1]. \end{cases}$$