Ejemplos de análisis de varios tipos de convergencia

Objetivos. Aprender a analizar varios tipos de convergencia.

Requisitos. Varios tipos de la convergencia, descripción en términos de los conjuntos auxiliares.

Se propone el siguiente plan para analizar varios tipos de convergencia:

a) Calcular el límite puntual $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo punto $x \in X$.

b) Determinar si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente o en casi todas partes a una función g.

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcular $\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Usando el resultado del inciso c) determinar si la convergencia es uniforme.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

i) Usando el resultado del inciso h) determinar si la convergencia es uniforme.

j) Calcular D. Comprobar el resultado del inciso b).

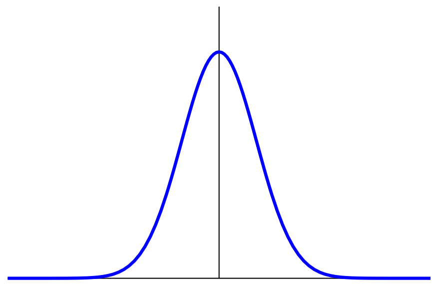
k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egoroff*).

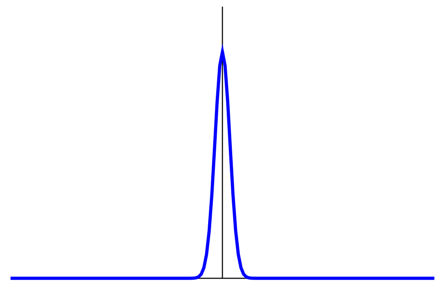
l) Se el inciso k) tiene respuesta afirmativa, pero no tiene caso la convergencia uniforme, para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E_η tal que $\mu(E_\eta) < \eta$ y $f_n \xRightarrow{X\setminus E_\eta} g$.

1. Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}.$$

Solución. Los dibujos muestran las gráficas de f_1 y f_5 (las escalas de los ejes no son iguales):





1. **Cálculo del límite puntual.** Para cada punto fijo x en $\mathbb{R}$ calculemos el límite de $f_n(x)$ cuando $n \to \infty$. Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f_n(x) \to 1$. Si $x \neq 0$, entonces $-n^2x^2 \to -\infty$ y por eso $f_n(x) \to 0$. La función límite es

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Denotemos por h_n a la función $|f_n - g|$:

$$h_n(x) \coloneqq |f_n(x) - g(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \mathrm{e}^{-n^2x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

2. **Análisis de la convergencia uniforme.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Notando que la función h_n es par y positiva, obtenemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = \sup_{x \geq 0} h_n(x) = \max\{h_n(0), \sup_{x>0} h_n(x)\} = \sup_{x>0} h_n(x).$$

La función h_n es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$, por eso

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = \sup_{x>0} h_n(x) = \lim_{x \to 0^+} h_n(x) = 1.$$

Concluimos que f_n no converge uniformemente a g.

3. **Análisis de la convergencia en medida.** Es suficiente calcular $A(\varepsilon, n)$ para ε cercanos a cero. Como las funciones h_n toman valores de 0 a 1, es natural suponer que $\varepsilon \in (0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, n) &= \{x \in \mathbb{R} \colon\ h_n(x) \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon\ \mathrm{e}^{-n^2x^2} \geq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon\ x^2 \leq \ln(1/\varepsilon)/n^2\} = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n}\right]. \end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon,n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

4. **Análisis de la convergencia casi uniforme.** En este ejemplo para cada $\varepsilon > 0$ la sucesión $(A(\varepsilon,n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por eso

$$B(\varepsilon,k) = \bigcup_{n\ge k} A(\varepsilon,n) = A(\varepsilon,k) = \left[-\frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k}\right].$$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B(\varepsilon,k)) = \lim_{k\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k} = 0.$$

Por lo tanto, $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

5. **Comprobación de la convergencia puntual.** Para cada $\varepsilon \in (0,1)$, la sucesión de conjuntos $(B(\varepsilon,k))_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente, y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}}{k} = 0,$$

Por eso

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon\in(0,1)} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Hemos comprobado que $f_n \xrightarrow{g}$.

6. **Conjuntos excepcionales de Egóroff.** Sea $\eta > 0$. Los incisos anteriores muestran que los conjuntos $B(\varepsilon,k)$ se concentran cerca del punto 0, por eso definimos E como

$$E = \left[-\frac{\eta}{4}, \frac{\eta}{4}\right].$$

Entonces $\mu(E) = \eta/2 < \eta$, y

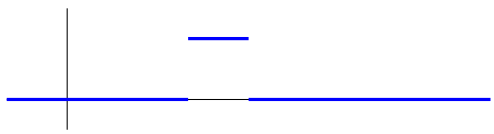
$$\lim_{\eta\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus E} h_n(x) = \lim_{\eta\to 0} \mathrm{e}^{-n^2\eta^2/16} = 0,$$

así que $f_n \xRightarrow{\mathbb{R}\setminus E} g$. $\square$

2. Ejemplo. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \chi_{[n,n+1)}.$$

Solución. Los dibujos muestran las gráficas de f_2 y f_5:



1. **Cálculo del límite puntual.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos $k = \max\{1, \lfloor x \rfloor + 1\}$. Entonces para cada $n \geq k$ se cumplen las desigualdades

$$x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq k \leq n,$$

   así que $x \notin [n, n+1)$ y $f_n(x) = 0$. Por eso la función límite es 0:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. **Análisis de la convergencia uniforme.** Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1.$$

   La sucesión constante 1 no tiende a cero, por eso la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a g.

3. **Análisis de la convergencia en medida.** Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = [n, n+1), \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) = 1.$$

   Para cada ε fijo en $(0,1)$, la sucesión $(\mu(A(\varepsilon, n)))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a cero, por eso f_n no converge a g en medida.

4. **Análisis de la convergencia casi uniforme.** Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) = \bigcup_{n\geq k} [n, n+1) = [k, +\infty), \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) = +\infty.$$

   Para cada ε fijo en $(0,1)$, la sucesión $(\mu(B(\varepsilon, k)))_{k\in\mathbb{N}}$ no tiende a cero, por eso f_n no converge casi uniformemente a g. A la misma conclusión podemos llegar más fácilmente: si no converge en medida, entonces no converge casi uniformemente.

5. **Comprobación de la convergencia puntual.** Para cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon,k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k,+\infty) = \varnothing.$$

El conjunto de no convergencia es

$$D = \bigcup_{\varepsilon\in(0,1)} C(\varepsilon) = \varnothing.$$

Acabamos de comprobar que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g$. □

3. Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}.$$

4. Ejemplo. $X = [0,1]$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 1_{[1/(n+1),1/n]}.$$

Analice varios tipos de convergencia en los siguientes ejemplos:

5. $X = [0,1)$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = x^n \qquad (x \in [0,1),\ n \in \mathbb{N}).$$

6. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

7. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = n \cdot 1_{[0,1/n]} = \begin{cases} n, & x \in [0,1/n], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1/n]. \end{cases}$$