Relaciones entre varios tipos de convergencia

Objetivos. Establecer relaciones entre varios tipos de convergencia: uniforme, puntual, casi uniforme, casi en todas partes, en medida:

en general

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{f_n \xrightarrow{X} g} \arrow[d] \\
\boxed{f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\rightrightarrows} g} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g} \\
\boxed{f_n \xrightarrow{\mu} g} \arrow[u, bend left, dashed, "\text{subsucesión}"] &
\end{tikzcd}$$

en el caso $\mu(X) < +\infty$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g} \arrow[rr] \arrow[d] & & \boxed{f_n \xrightarrow{X} g} \arrow[d] \\
\boxed{f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\rightrightarrows} g} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & \boxed{f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g} \arrow[dl] \\
& \boxed{f_n \xrightarrow{\mu} g} \arrow[ul, bend left, dashed, "\text{subsucesión}"] &
\end{tikzcd}$$

Requisitos. Conocer todos los tipos de convergencia mencionados arriba y su descripción en términos de los conjuntos auxiliares $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$, D.

1. Ejercicio (la convergencia casi uniforme implica la convergencia en medida). Sea $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\rightrightarrows} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

2. Teorema de Egóroff. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida finita ($\mu(X) < +\infty$), sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F}$-medible tales que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Entonces $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\rightrightarrows} g$.

Demostración. La hypótesis $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$. Vamos a demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. De la contención $C(\varepsilon) \subset D$ se sigue que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$. Recordamos que $C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k)$ y que $(B(\varepsilon, k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente. Además $\mu(B(\varepsilon, 0)) \leq \mu(X) < +\infty$. Por lo tanto podemos aplicar la fórmula de la medida de la intersección de una sucesión decreciente:

$$\lim_{k\to\infty} \mu\big(B(\varepsilon, k)\big) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k)\right) = \mu\big(C(\varepsilon)\big) = 0. \qquad \square$$

3. Corolario (la convergencia casi en todas partes implica la convergencia en medida). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita ($\mu(X) < +\infty$), sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F}$-medible. Si $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

4. Teorema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu} g$, donde $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces existe una subsucesión $(f_{\nu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ tal que f_{ν_p} converge a g casi uniformemente.

Demostración. Por la hipótesis, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $\mu\big(A(\varepsilon, n)\big) \to 0$. Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que $\mu\big(A(\varepsilon, n)\big) < \delta$ para todo $n \ge K(\varepsilon, \delta)$.

Construimos la sucesión de índices $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_0 := K\left(\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^0}\right), \qquad \nu_p := \max\left\{K\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right), \nu_{p-1} + 1\right\}.$$

En esta construcción es importante que $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente,

$$\frac{1}{2^p} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} < +\infty.$$

Vamos a demostrar que $f_{\nu_p} \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Denotemos de la siguiente manera a los conjuntos auxiliares que corresponden a la subsucesión $(f_{\nu_p})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu_p), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p\ge q} \widetilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p\ge q} A(\varepsilon, \nu_p)$$

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$. Para ello elijamos un $\delta > 0$ arbitrario y demostremos que $\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) < \delta$ para todo q a partir de algún índice s. Elijamos un $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^s} < \varepsilon, \qquad \sum_{p=s}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \delta.$$

Entonces para cualquier $q \ge s$ se obtienen las contenciones

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subset \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subset \widetilde{B}(2^{-s}, s),$$

de las cuales se siguen las desigualdades

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \le \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu_p)) \le \sum_{p=s}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \delta. \qquad \square$$

Ejemplos

5. Considérese la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, definida mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}.$$

1. Demuestre que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}_+} 0$.
2. Determine si tiene caso la convergencia uniforme o no: $f_n \overset{\mathbb{R}_+}{\Longrightarrow} 0$.
3. Para $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrarios encuentre el conjunto $A_n(\varepsilon)$.
4. Determine si $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ o no, donde μ es la medida de Lebesgue.

6. Tarea adicional. Definamos las funciones $f_{p,k}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante la regla:

$$f_{p,k}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{k-1}{p} \leq x < \frac{k}{p}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pongamos $g_n(x) = f_{p,k}(x)$ donde $n = \frac{p(p-1)}{2} + k$. Demuestre que g_n converge a 0 en medida, pero el límite de $g_n(x)$ no existe en ningún $x \in [0,1]$.

7. Tarea adicional. Numeremos todos los números racionales del intervalo $[0,1]$ en forma de una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Escribamos r_n como p_n/q_n donde p_n y q_n son primos relativos. Pongamos

$$f_n(x) = \exp\left(-(p_n - xq_n)^2\right).$$

1. Demuestre que $f_n \to 0$ en la medida de Lebesgue μ.
2. Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite en ningún punto $x \in [0,1]$.
3. Construya una subsucesión que converja a 0 casi en todas partes.