Funciones continuas entre espacios métricos

En este tema suponemos que (X, d_X) e (Y, d_Y) son espacios métricos. Denotamos por τ_X y τ_Y las topologías inducidas correspondientes.

Dado x en X, denotamos por $\tau_X(x)$ al conjunto de las vecindades abiertas del punto x:

$$\tau_X(x) \coloneqq \{V \in \tau_X : \quad x \in V\}.$$

De manera similar, dado y en Y, denotamos por $\tau_Y(y)$ al conjunto de las vecindades abiertas del punto y.

1 Definición. Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *continua* si para cualquier conjunto A, abierto en Y, su preimagen bajo f es un conjunto abierto en X.

2 Definición. Denotamos por $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas $X \to Y$.

De manera formal,

$$C(X, Y) \coloneqq \left\{f \in Y^X : \quad \forall A \in \tau_Y \quad f^{-1}[A] \in \tau_X\right\}.$$

3 Definición. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $x \in X$. Se dice que la función f es *continua en el punto* x si para cada W en $\tau_Y(f(x))$ existe V en $\tau_X(x)$ tal que $f[V] \subseteq W$.

4 Proposición. *Sea $f\colon X \to Y$ y sea $x \in X$. Entonces f es continua en x si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f[B(x, \delta)] \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.*

Repaso de algunas propiedades de imágenes y preimágenes

En este repaso suponemos que $f\colon X \to Y$, donde X, Y son algunos conjuntos.

5 Proposición (sobre la imágen de la preimágen)**.** *Sea $Q \subseteq Y$. Entonces*

$$f[f^{-1}[Q]] \subseteq Q.$$

6 Proposición (sobre la preimágen de la imagen)**.** *Sea $P \subseteq X$. Entonces*

$$P \subseteq f^{-1}[f[P]].$$

7 Proposición (monotonía de la imagen)**.** *Sean $P_1, P_2 \subseteq X$ tales que $P_1 \subseteq P_2$. Entonces*

$$f[P_1] \subseteq f[P_2].$$

8 Proposición (monotonía de la preimagen)**.** *Sean $Q_1, Q_2 \subseteq Y$ tales que $Q_1 \subseteq Q_2$. Entonces*

$$f^{-1}[Q_1] \subseteq f^{-1}[Q_2].$$

9 Proposición (sobre contenciones, imágenes y preimágenes)**.** *Sean X, Y algunos conjuntos, $f\colon X \to Y$ una función, $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$. Entonces*

$$f[P] \subseteq Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad P \subseteq f^{-1}[Q].$$

Demostración. 1. Supongamos que $f[P] \subseteq Q$. Usando la proposición sobre la preimagen de la imagen y la propiedad monótona de la preimagen, obtenemos

$$P \subseteq f^{-1}[f[P]] \subseteq f^{-1}[Q].$$

2. Supongamos que $P \subseteq f^{-1}[Q]$. Usando la proposición sobre la imagen de la preimagen y la propiedad monótona de la imagen, obtenemos

$$f[P] \subseteq f[f^{-1}[Q]] \subseteq Q.$$ □

Criterios de continuidad

10 Teorema (criterio de la continuidad en términos de la continuidad local)**.** *Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si y solo si para cada x en X la función f es continua en el punto x.*

Demostración. 1. Supongamos que f es continua. Sea $x \in X$. Demostremos que f es continua en x. Sea $W \in \tau_Y(f(x))$. Pongamos $V \coloneqq f^{-1}[W]$. Entonces, por la suposición que f es continua, tenemos que $V \in \tau_X$. Además, como $f(x) \in W$, tenemos que $x \in f^{-1}[W] = V$. Luego $V \in \tau_X(x)$. Finalmente,

$$f[V] = f[f^{-1}[W]] \subseteq W.$$

2. Supongamos que f es continua en cada punto del espacio X. Sea A un conjunto abierto en Y. Demostremos que $f^{-1}[A]$ es un conjunto abierto en X. Sea $x \in f^{-1}[A]$. Entonces

$f(x) \in A$. Luego $A \in \tau_Y(f(x))$. Como f es continua en x, existe V en $\tau_X(x)$ tal que $f[V] \subseteq A$. Entonces $V \subseteq f^{-1}[A]$.

Para un punto arbitrario x del conjunto $f^{-1}[A]$ hemos mostrado que existe V en $\tau_X(x)$ tal que $V \subseteq f^{-1}[A]$. Con esto hemos probado que $f^{-1}[A] \in \tau_X$. $\square$

11 Proposición (criterio de continuidad en términos de conjuntos cerrados)**.** *Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si, y solo si, para cada conjunto C cerrado en Y, el conjunto $f^{-1}[C]$ es cerrado en X.*

Demostración. Aplicar la propiedad $f^{-1}[Y \setminus G] = X \setminus f^{-1}[G]$. $\square$

12 Proposición (criterio de continuidad en términos de los interiores y las preimágenes)**.** *] Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si y solo si para cada $G \subseteq Y$ se cumple que*

$$f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq \mathrm{int}_X(f^{-1}[G]). \tag{1}$$

Demostración. 1. Supongamos que f es continua. Como $\mathrm{int}_Y(G) \in \tau_Y$, obtenemos que $f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \in \tau_X$. Además, como $\mathrm{int}_Y(G) \subseteq G$, por la propiedad monótona de las preimágenes

$$f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq f^{-1}[G].$$

Hemos mostrado que $f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)]$ es un conjunto abierto contenido en $f^{-1}[G]$. Luego $f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq \mathrm{int}_X(f^{-1}[G])$.

2. Supongamos que para cada $G \subseteq Y$ se cumple que (1). Mostremos que f es continua. Sea $G \in \tau_Y$. Entonces

$$f^{-1}[G] = f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq \mathrm{int}_X(f^{-1}[G]) \subseteq f^{-1}[G].$$

Hemos mostrado que el conjunto $f^{-1}[G]$ coincide con su interior. Luego $f^{-1}[G] \in \tau_X$. $\square$

Otra demostración de la Proposición 12, usando la continuidad local. 1. Sea f continua. Sea $G \subseteq Y$. Sea $x \in f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)]$. Entonces $f(x) \in \mathrm{int}_Y(G)$. Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq G$. Por el Teorema 10, f es continua en el punto x. Encontramos $\delta > 0$ tal que $f[B_X(x, \delta)] \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$. Entonces $f[B_X(x, \delta)] \subseteq G$. Por la Proposición 9, $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}[G]$. Hemos mostrado que $x \in \mathrm{int}_X(f^{-1}[G])$.

2. Ahora supongamos que para cada $G \subseteq Y$ se cumple (1). Mostremos que f es continua en cada punto x. Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $G = B(f(x), \varepsilon)$. Entonces $G \in \tau_Y$, luego $\mathrm{int}_Y(G) = G$. Aplicando (1) obtenemos

$$x \in f^{-1}[G] = f^{-1}[\mathrm{int}_Y(G)] \subseteq \mathrm{int}_X(f^{-1}[G]).$$

Luego existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}[G]$. Esto significa que $f[B(x, \delta)] \subseteq G$. $\square$

13 Proposición (criterio de continuidad en términos de las cerraduras y las preimágenes)**.** *Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si, y solo si, para cada $G \subseteq X$ se cumple que*

$$\operatorname{cl}_X(f^{-1}[G]) \subseteq f^{-1}[\operatorname{cl}_Y(G)]. \tag{2}$$

14 Proposición (criterio de continuidad en términos de las cerraduras y las imágenes)**.** *Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si, y solo si, para cada $A \subseteq X$ se cumple que*

$$f[\operatorname{cl}_X(A)] \subseteq \operatorname{cl}_Y(f[A]). \tag{3}$$

15 Proposición. *Sea $c \in Y$. Definimos f mediante la regla*

$$f(x) \coloneqq c \qquad (x \in X).$$

Entonces f es continua.

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces $f(x) = c$. Elegimos $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta = 1$. Entonces $f[B(x,\delta)] \subseteq \{c\} \subseteq B(c,\varepsilon)$. □

16 Ejemplo. Consideremos los espacios métricos $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{Z}$ con las distancias comunes. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mediante la regla

$$f(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Consideremos el conjunto $A \coloneqq \{5\}$. Entonces $f[A] = \{0\}$,

$$\operatorname{int}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing, \qquad f[\operatorname{int}_{\mathbb{R}}(A)] = \varnothing, \qquad \operatorname{int}_{\mathbb{Z}}(f[A]) = \{0\}.$$

Notamos que

$$\operatorname{int}_Y(f[A]) \not\subseteq f[\operatorname{int}_X(A)].$$

17 Ejemplo. Consideremos los espacios métricos $X = \mathbb{Z}$ e $Y = \mathbb{R}$ con las distancias comunes. Definimos $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in \mathbb{Z}).$$

Consideremos el conjunto $A \coloneqq \{5\}$. Entonces $f[A] = \{0\}$,

$$\operatorname{int}_{\mathbb{Z}}(A) = \{5\}, \qquad f[\operatorname{int}_{\mathbb{Z}}(A)] = \{0\}, \qquad \operatorname{int}_{\mathbb{R}}(f[A]) = \varnothing.$$

Notamos que

$$f[\operatorname{int}_X(A)] \not\subseteq \operatorname{int}_Y(f[A]).$$

Los Ejemplos 16 y 17 muestran que la continuidad de f no se puede describir en términos de una contención entre los conjuntos $\operatorname{int}_Y(f[A])$ y $f[\operatorname{int}_X(A)]$.