Continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

1. Lema. Sea $f \in L^1(X, \mu)$ Para cada $v > 0$ pongamos

$$A_v \coloneqq \{x \in X\colon\ |f(x)| \geq v\}.$$

Entonces

$$\lim_{v \to +\infty} \int\limits_{A_v} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración. Aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. □

2. Teorema (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración). Sea $f \in L^1(X, \mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier Y en $\mathcal{F}$ con $\mu(Y) < \delta$, se cumple que

$$\int\limits_Y |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos $v > 0$ tal que $\int_{A_v} |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/2$. Pongamos $\delta = \varepsilon/(2v)$. Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \leq \delta$. Entonces

$$\int\limits_Y |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{Y \cap A_v} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{Y \setminus A_v} |f| \,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \delta v = \varepsilon.$$ □

3. Corolario. Sea $f \in L^1(X, \mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$ con $\mu(A \triangle B) < \delta$, se cumple que

$$\left| \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Pongamos $C = A \cap B$, $D = A \setminus C$, $E = B \setminus C$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int\limits_D f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int\limits_{D \cup E} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A \triangle B} |f| \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Aplicando el teorema, podemos acotar la última expresión. □

4. Definición (función localmente integrable). Sea D un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{M}(D, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Se dice que f es *localmente integrable* en D y sea escribe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, si para cada subconjunto compacto K de D se tiene que

$$\int\limits_K |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

5. Observación. Si $n = 1$ y D es un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces la condición de la definición anterior es equivalente a la siguiente condición: para cualesquiera α, β en D tales que $\alpha < \beta$, f es integrable en $[\alpha, \beta]$.

6. Corolario. Sean D un intervalo en $\mathbb{R}$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, $x_0 \in D$. Definimos $g\colon D \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$g(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{[x_0, x]} f \, \mathrm{d}\mu, & \text{si } x \geq x_0; \\ \displaystyle -\int\limits_{[x, x_0]} f \, \mathrm{d}\mu, & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

Entonces $g \in C(D, \mathbb{C})$.