Continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

1 Lema. *Sea* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$*, esto es,* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty. \tag{1}$$

Para cada m *en* $\mathbb{N}$ *pongamos*

$$A_m \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \ge m\}.$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} |f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Primera demostración. Esta demostración está basada en el teorema de la convergencia monótona. Para cada m en $\mathbb{N}$ definimos B_m como

$$B_m \coloneqq X \setminus A_m = \{x \in X\colon\ f(x) < m\}.$$

Además, pongamos

$$A_{+\infty} \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}, \quad B_{+\infty} \coloneqq X \setminus A_{+\infty} = \{x \in X\colon\ f(x) < +\infty\}.$$

Como ya sabemos, la condición (1) implica que $\mu(A_{+\infty}) = 0$. Luego

$$\int_{A_{+\infty}} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

De la igualdad $(0, +\infty) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (0, m)$, sacando las preimágenes bajo f, obtenemos

$$B_{+\infty} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m.$$

Luego se tiene la convergencia puntual creciente $\mathbb{1}_{B_m} \to \mathbb{1}_{B_{+\infty}}$, y la convergencia puntual creciente $f\mathbb{1}_{B_m} \to f\mathbb{1}_{B_{+\infty}}$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{m\to\infty} \int_X f\mathbb{1}_{B_m} \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\mathbb{1}_{B_{+\infty}} \, \mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{B_{+\infty}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{B_{+\infty}} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A_{+\infty}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Todas estas expresiones son finitas. Luego

$$\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \, \mathrm{d}\mu = 0. \qquad \square$$

Segunda demostración. Definimos $\nu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ como

$$\nu(Y) \coloneqq \int\limits_Y f \,\mathrm{d}\mu.$$

Sabemos que ν es una medida (lo hemos demostrado usando el teorema de la convergencia monótona). Igual que en la primera demostración, definimos

$$A_{+\infty} \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}$$

y notamos que $\mu(A_{+\infty}) = 0$ y

$$\nu(A_{+\infty}) = \int\limits_{A_{+\infty}} f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Como $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(m,+\infty] = \{+\infty\}$, sacando las preimágenes bajo f obtenemos

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = A_{+\infty}.$$

La sucesión $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente, y

$$\nu(A_1) = \int\limits_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Aplicamos la continuidad de la medida ν por arriba:

$$\lim_{m\to\infty} \nu(A_m) = \nu(A_{+\infty}) = 0. \qquad \square$$

2 Ejercicio. En las condiciones del Lema 1, definimos A_v de la misma manera para cada $v > 0$:

$$A_v \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \ge v\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{v\to+\infty} \int\limits_{A_v} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Sugerencia: mostrar que si $v \ge m$, entonces $A_v \subseteq A_m$ y

$$\int\limits_{A_v} f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_{A_m} f \,\mathrm{d}\mu.$$

3 Ejercicio. Supongamos que $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty))$, es decir, se cumple la condición del Lema 1 y todos los valores de f son finitos. ¿Cómo se simplifican en este caso las dos demostraciones del Lema 1?

4 Teorema (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, el caso de funciones positivas). *Sea* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$*, esto es,* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y*

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para cualquier* Y *en* $\mathcal{F}$ *con* $\mu(Y) < \delta$*, se cumple que*

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 1 encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int\limits_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta \coloneqq \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \le \delta$. Entonces

$$\int\limits_Y |f| \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{Y \cap A_m} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{Y \setminus A_m} |f| \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \delta v = \varepsilon.$$

□

5 Corolario (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, el caso de funciones complejas). *Sea* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$*, esto es,* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *y*

$$\int\limits_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para cualquier* Y *en* $\mathcal{F}$ *con* $\mu(Y) < \delta$*, se cumple que*

$$\int\limits_Y |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Vamos a ver que si $f \in \mathcal{L}^1$ y dos conjuntos medibles A y B son cercanos en el sentido que su diferencia simétrica $A \triangle B$ tiene medida pequeña, entonces las integrales $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ e $\int_B f \, \mathrm{d}\mu$ son números cercanos.

6 Proposición. *La función* $\xi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$*, definida mediante la regla*

$$\xi(A, B) \coloneqq \mu(A \triangle B),$$

es una pseudométrica.

Demostración. Este resultado, ya visto anteriormente, está basado en la contención

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B). \qquad \square$$

7 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Dotamos el conjunto $\mathcal{F}$ de la pseudométrica ξ y definimos $\eta\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$,*

$$\eta(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces la función η es uniformemente continua, esto es, cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$ con $\mu(A \triangle B) < \delta$, se cumple que

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Encontremos δ como en el Corolario 5, y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Notamos que el conjunto A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$, y el conjunto B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$. Luego

$$\begin{aligned}
\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A \setminus B} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{B \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&= \left| \int_{A \setminus B} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{B \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \left| \int_{A \setminus B} f \, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_{B \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&\le \int_{A \setminus B} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{B \setminus A} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A \triangle B} |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$