

Continuidad de operaciones lineales
en espacios normados
(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko,
<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de septiembre de 2022

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A: V \times V \rightarrow V, \quad A(u, v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M: \mathbb{C} \times V \rightarrow V, \quad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A: V \times V \rightarrow V, \quad A(u, v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M: \mathbb{C} \times V \rightarrow V, \quad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sea τ una topología en V .

Se dice que (V, τ) es un espacio vectorial topológico si A y M son continuas.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Recordar la definición de la topología del producto en $X_1 \times X_2$.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Recordar la definición de la topología del producto en $X_1 \times X_2$.

Mostrar que los conjuntos de la forma

$$A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \tau_1, \quad A_2 \in \tau_2,$$

son elementos de la topología del producto.

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma.
Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Vamos a demostrar esta proposición en las siguientes páginas.

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2 , los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b) :

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2 , los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b) :

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2 , los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b) :

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2) = \left\{ (u, v) \in V^2 : \|u - a\| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|v - b\| < \delta_2 \right\}.$$

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2 , los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b) :

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2) = \left\{ (u, v) \in V^2 : \|u - a\| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|v - b\| < \delta_2 \right\}.$$

Más aún, cualquier vecindad abierta de (a, b) contiene un conjunto de esta forma.

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a) :

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a) :

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a) :

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2) = \left\{ (\eta, u) \in \mathbb{C} \times V : |\eta - \xi| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|u - a\| < \delta_2 \right\}.$$

Preparamos a demostrar que EN es EVT.

¿Qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a) :

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2) = \left\{ (\eta, u) \in \mathbb{C} \times V : |\eta - \xi| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|u - a\| < \delta_2 \right\}.$$

Más aún, cualquier vecindad abierta de (ξ, a) contiene un conjunto de esta forma.

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$.

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\|\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta =\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\|$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| = \|\eta u - \xi a\|$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| = \|\eta u - \xi a\| =$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| = \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\|$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\|\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta) \delta\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta) \delta < \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta < \varepsilon\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \|u - a\| + |\eta - \xi| \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta \|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$



Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)]$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] =$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] = \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= B(a, \delta) + B(b, \delta) \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= B(a, \delta) + B(b, \delta) = \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= B(a, \delta) + B(b, \delta) = B(a + b, 2\delta) \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= B(a, \delta) + B(b, \delta) = B(a + b, 2\delta) = \end{aligned}$$

Demostración de la continuidad de A en el lenguaje de bolas

Dados $a, b \in V$ y $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta := \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} A[B(a, \delta) \times B(b, \delta)] &= \left\{ w \in V : \exists (u, v) \in B(a, \delta) \times B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= \left\{ w \in V : \exists u \in B(a, \delta) \quad \exists v \in B(b, \delta) \quad w = A(u, v) \right\} \\ &= B(a, \delta) + B(b, \delta) = B(a + b, 2\delta) = B(a + b, \varepsilon). \end{aligned}$$

Demostrar la continuidad de M en el lenguaje de bolas

Ejercicio. Mostrar que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) B_V(a, \delta_2) = \bigcup_{\eta \in B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1)} (\eta B_V(a, \delta_2)).$$

Demostrar la continuidad de M en el lenguaje de bolas

Ejercicio. Mostrar que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \cap B_V(a, \delta_2) = \bigcup_{\eta \in B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1)} (\eta \cap B_V(a, \delta_2)).$$

Ejercicio. Demostrar la continuidad de función M usando el lenguaje de bolas.

Continuidad de las operaciones lineales, en términos de sucesiones

Corolario

Sea V un espacio normado complejo. Supongamos que $u, v \in V^{\mathbb{N}}$, $\eta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a, b \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = b, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \xi.$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k + v_k) = a + b, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_k u_k) = \xi a.$$

Continuidad de las operaciones lineales, en términos de sucesiones

Corolario

Sea V un espacio normado complejo. Supongamos que $u, v \in V^{\mathbb{N}}$, $\eta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a, b \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = b, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \xi.$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k + v_k) = a + b, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_k u_k) = \xi a.$$

Ejercicio: demostrar esta afirmación de manera directa.

Los desplazamientos son homeomorfismos

Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo y sea $a \in V$. Definimos

$$T_a: V \rightarrow V, \quad T_a(x) := x + a.$$

Entonces T_a es un homeomorfismo.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Las dilataciones son homeomorfismos

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definimos

$$S_\lambda: V \rightarrow V, \quad S_\lambda(x) := \lambda x.$$

Entonces S_λ es un homeomorfismo.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\| \cdot \|$ es continua.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\| \cdot \|$ es continua.

Demostración.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\| \cdot \|$ es continua.

Demostración.

Recordamos la desigualdad inversa del triángulo para la norma:

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|.$$

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\| \cdot \|$ es continua.

Demostración.

Recordamos la desigualdad inversa del triángulo para la norma:

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|.$$

Esta desigualdad implica que $\| \cdot \|$ es Lipschitz continua.

Continuidad de la norma, en términos de sucesiones

Ejercicio.

Sea V un espacio normado complejo, sea $u \in V^{\mathbb{N}}$ y sea $v \in V$.

Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v.$$

Demostrar de manera directa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|v\|.$$