Subconjuntos conexos del eje real

Objetivos. Describir los intervalos en $\mathbb{R}$ de varias maneras equivalentes. Demostrar que cada intervalo es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, y cualquier subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo. Como una aplicación de este resultado, deducir el teorema del valor intermedio.

Prerrequisitos. Subconjunto conexo, intervalo, supremo, ínfimo.

En estos apuntes usamos la notación $[a, b]$ en el siguiente sentido:

$$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \colon\ a \le x \le b\}.$$

Por ejemplo, $[5, -3] = \varnothing$. De manera similar se definen intervalos de la forma $[a, b)$, $(a, b]$ y (a, b).

1 Definición. Un *intervalo* en $\mathbb{R}$ es un conjunto de $\mathbb{R}$ de la forma (a, b), o $(a, b]$, o $[a, b)$, o $[a, b]$, donde $a, b \in [-\infty, +\infty]$. Notemos que si $a = -\infty$, entonces se excluyen los casos $[a, b)$ y $[a, b]$, y si $b = +\infty$, entonces se excluyen los casos $(a, b]$ y $[a, b]$.

En otras palabras, los intervalos son conjuntos de las siguientes formas, con a, b en $\mathbb{R}$, $a < b$:

$$\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{a\},\ \ (a, +\infty),\ [a, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, b),\ (a, b],\ [a, b),\ [a, b].$$

Otra opción es permitir $a = b$; así obtenemos $[a, a] = \{a\}$, y los intervalos $(a, a]$, $[a, a)$ y (a, a) son vacíos.

2 Proposición (descripción de intervalos en términos elementales)**.** *Sea $A \subseteq X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es un intervalo en $\mathbb{R}$,

(b) $(\operatorname{ínf}(A), \sup(A)) \subseteq A$,

(c) para cualesquiera x, y en A, si $x < y$, entonces $[x, y] \subseteq A$.

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Si $A = \varnothing$, entonces $\operatorname{ínf}(A) = +\infty$, $\sup(A) = -\infty$, y

$$(\operatorname{ínf}(A), \sup(A)) = (+\infty, -\infty) = \varnothing \subseteq A.$$

Si $A = \{a\}$ con a en $\mathbb{R}$, entonces $(\operatorname{ínf}(A), \sup(A)) = (a, a) = \varnothing \subseteq A$. Cualquier intervalo no degenerado (es decir, que contiene más de un punto) se puede escribir como (a, b), o $(a,b]$, o $[a,b)$, o $[a,b]$, donde $-\infty \le a < b \le +\infty$. Es fácil ver que en cualquier caso $\operatorname{ínf}(A) = a$, $\sup(A) = b$, y $(a,b) \subseteq A$.

Supongamos (b) y demostremos (a). Si $A = \varnothing$, entonces (a) se cumple. Supongamos que $A \ne \varnothing$. Sean $a \coloneqq \operatorname{ínf}(A)$, $b \coloneqq \sup(A)$. Como $A \ne \varnothing$, existe un x_0 en A, y $a \le x_0 \le b$. Consideremos varios casos y subcasos.

- $a = -\infty$, $b = +\infty$. En este caso hay solo un subcaso: $A = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
- $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$. Subcasos: $A = (-\infty, b)$, $A = (-\infty, b]$.
- $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$. Subcasos: $A = (a, +\infty)$, $A = [a, +\infty)$.
- $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Subcasos: $A = (a,b)$, $A = (a,b]$, $A = [a,b)$, $A = [a,b]$.

En todos los casos y subcasos, A es un intervalo.

Supongamos (b) y demostremos (c). Sean $x, y \in A$, $x < y$. Como $\operatorname{ínf}(A) \le x < y \le \sup(A)$, obtenemos $(x,y) \subseteq (\operatorname{ínf}(A), \sup(A))$. Luego

$$[x,y] = \{x\} \cup (x,y) \cup \{y\} \subseteq \{x\} \cup (\operatorname{ínf}(A), \sup(A)) \cup \{y\} \subseteq A.$$

Supongamos (c) y demostremos (b). Sea $a \in (\operatorname{ínf}(A), \sup(A))$. Entonces, por la definición de $\operatorname{ínf}(A)$, existe x en A tal que $x < a$, y por la definición de $\sup(A)$, existe y en A tal que $a < y$. Tenemos $x < a < y$, donde $x, y \in A$. Por la condición (c), $a \in A$. □

3 Teorema (descripción de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces A es conexo si, y solo si, A es un intervalo.*

Demostración. 1. Supongamos que A no es intervalo y mostremos que A es disconexo. Como A no es invervalo, existen x, y en $\mathbb{R}$ tales que $x < y$ y $[x,y] \nsubseteq A$. Entonces existe z tal que $x < z < y$ y $z \notin A$. Pongamos $V \coloneqq (-\infty, z)$, $W \coloneqq (z, +\infty)$. Entonces $V \cap A \ne \varnothing$, $W \cap A \ne \varnothing$, $(V \cap A) \cup (w \cap A) = A \setminus \{z\} = A$, y $V \cap W \cap A = \varnothing$. Hemos demostrado que A es disconexo.

2. Supongamos que A es un intervalo y mostremos que A es conexo. Razonando por reducción al absurdo supongamos que A es disconexo. Entonces A se puede partir en dos partes P y Q, abiertas en A. Sean $a \in P$, $b \in Q$. Consideremos el caso $a < b$ (el otro caso es similar). Pongamos

$$c \coloneqq \sup([a,b] \cap P).$$

Entonces el punto c puede pertener al conjunto P o al conjunto Q.

- Sea $c \in P$. Como $b \in Q$, obtenemos que $c < b$. Como P es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_A(c, r) \subseteq P$, esto es, $(c - r, c + r) \cap A \subseteq P$. Pongamos $r_1 := \min\{r, b - c\}$. Entonces $[c, c + r_1) \subseteq [a, b] \cap P$. En particular, $c + r_1/2 \in [a, b] \cap P$, y

$$c = \sup([a, b] \cap P) \geq c + r_1/2 > c.$$

- Sea $c \in Q$. Como $a \in P$, obtenemos que $a < c$. Como Q es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_A(c, r) \subseteq Q$, esto es, $(c - r, c + r) \cap A \subseteq Q$. Pongamos $r_1 := \min\{r, c - a\}$. Entonces $(c - r_1, c] \subseteq [a, b] \cap Q$. Luego $[a, b] \cap P \subseteq [a, c - r_1]$ y

$$c = \sup([a, b] \cap P) \leq c - r_1 < c.$$

En cada uno de los dos casos hemos obtenido una contradicción. Por lo tanto, A es conexo. $\square$

4 Teorema (teorema del valor intermedio)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pongamos $v := \min\{f(a), f(b)\}$, $w := \max\{f(a), f(b)\}$. Entonces para cada y en $[v, w]$ existe x en $[a, b]$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración. Vamos a usar el Teorema 3 y el resultado (demostrado anteriormente) que la imagen de cualquier espacio métrico conexo bajo cualquier función continua es un conjunto conexo en el codominio.

Por el Teorema 3, el intervalo $[a, b]$ es un conjunto conexo. Como f es continua, el conjunto $f([a, b])$ es conexo en $\mathbb{R}$. Aplicando el Teorema 3 otra vez concluimos que $f([a, b])$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. Además, $v, w \in f([a, b])$. Si $y \in [v, w]$, entonces $y \in f([a, b])$. $\square$