

Subconjuntos conexos en espacios topológicos

Agradezco a Diana Marcela Erazo Borja por algunas correcciones y discusiones de estos apuntes.

Objetivos. Demostrar un par de criterios elementales de subconjuntos conexos en espacios topológicos.

Prerrequisitos. Conjuntos abiertos y cerrados en espacios topológicos, subespacio de un espacio topológico.

Definición 1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que (X, τ) es *disconexo* si existen $P, Q \in \tau$ tales que $X = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$.

Definición 2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que (X, τ) es *conexo* si (X, τ) no es disconexo.

Observación 3. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. Se define

$$\tau_E := \{A \cap E : A \in \tau\}.$$

Es posible demostrar que τ_E es una topología. Se dice que τ_E es la topología inducida. (E, τ_E) se llama subespacio topológico de (X, τ) .

Ejemplo 4. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual τ . Sea $E = [0, 5]$. El conjunto $[0, 3)$ es abierto en E porque

$$[0, 3) = E \cap (-1, 3).$$

Definición 5. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. Se dice que E es *disconexo* si el espacio topológico (E, τ_E) es disconexo.

Proposición 6. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. Entonces, E es disconexo si, y solo si, existen $V, W \in \tau$ tales que

$$E \subseteq V \cup W, \quad V \cap W \cap E = \emptyset, \quad V \cap E \neq \emptyset, \quad W \cap E \neq \emptyset. \quad (1)$$

Demostración. $\Rightarrow$. Sean $P, Q \in \tau_E$ como en la definición de espacio disconexo. Encontramos $V, W \in \tau$ tales que $P = V \cap E$, $Q = W \cap E$. Mostremos que V y W tienen las propiedades (1). Empezamos con las siguientes dos propiedades obvias:

$$V \cap E = P \neq \emptyset, \quad W \cap E = Q.$$

Demostremos que $E \subseteq V \cup W$. Usamos la igualdad $P \cup Q = E$ y la propiedad distributiva:

$$E = P \cup Q = (V \cap E) \cup (W \cap E) = (V \cup W) \cap E.$$

De aquí concluimos que $E \subseteq V \cup W$.

Demostremos que $V \cap E \cap E = \emptyset$. Usamos la igualdad $P \cap Q = \emptyset$ y varias propiedades de la operación $\cap$:

$$\emptyset = P \cap Q = (V \cap E) \cap (W \cap E) = V \cap W \cap E \cap E = V \cap W \cap E.$$

$\Leftarrow$. Sean $V, W \in \tau$ tales que se cumplen (1). Pongamos $P := V \cap E$ y $Q := W \cap E$. Entonces, $P, Q \in \tau_E$, y es fácil ver que

$$E = P \cup Q, \quad P \cap Q = \emptyset, \quad P \neq \emptyset, \quad Q \neq \emptyset. \quad \square$$

Observación 7. En lo que sigue, usamos mucho el siguiente hecho. Si $Y, Z \subseteq X$, entonces

$$Y \cap Z = \emptyset \iff Z \subseteq X \setminus Y.$$

Proposición 8. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. Entonces, E es desconexo si, y solo si, existen $A, B \subseteq E$ tales que

$$E = A \cup B, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad \text{cl}(A) \cap B = \emptyset, \quad A \cap \text{cl}(B) = \emptyset. \quad (2)$$

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que E es desconexo. Encontramos $V, W \in \tau$ tales que se cumplen las propiedades (1). Pongamos

$$A := V \cap E, \quad B := W \cap E.$$

Entonces, es fácil ver que A y B satisfacen (2). Probemos solamente que $\text{cl}(A) \cap B = \emptyset$. Como $V \cap W \cap E = \emptyset$, tenemos que

$$A = V \cap E \subseteq X \setminus W.$$

Como $X \setminus W$ es cerrado,

$$\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(X \setminus W) = X \setminus W.$$

Luego $\text{cl}(A) \cap W = \emptyset$ y

$$\text{cl}(A) \cap B \subseteq \text{cl}(A) \cap W = \emptyset.$$

$\Leftarrow$. Supongamos que $A, B \subseteq E$ tales que se cumplen (2). Pongamos

$$V := X \setminus \text{cl}(B), \quad W := X \setminus \text{cl}(A).$$

Entonces, tenemos que $V, W \in \tau$,

$$A \subseteq X \setminus \text{cl}(B) = V, \quad B \subseteq X \setminus \text{cl}(A) = W.$$

Por lo tanto,

$$V \cap E \supseteq V \cap A = A \neq \emptyset, \quad W \cap E \supseteq W \cap B = B \neq \emptyset, \quad E = A \cup B \subseteq V \cup W.$$

Además,

$$V \cap B = (X \setminus \text{cl}(B)) \cap B = \emptyset, \quad W \cap A = (X \setminus \text{cl}(A)) \cap A = \emptyset.$$

Finalmente,

$$V \cap W \cap E = V \cap W \cap (A \cup B) \subseteq (V \cap B) \cup (W \cap A) = \emptyset. \quad \square$$

Corolario 9. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea E un subconjunto cerrado desconexo de X . Entonces, existen subconjuntos cerrados no vacíos A y B de X tales que $E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Sean $A, B \subseteq E$ tales que se cumplen (2). Mostremos que A y B son cerrados. Primero, notamos que

$$\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(E) = E.$$

Luego

$$\text{cl}(A) = \text{cl}(A) \cap E = \text{cl}(A) \cap (A \cup B) = (\text{cl}(A) \cap A) \cup (\text{cl}(A) \cap B) = A \cup \emptyset = A.$$

De manera similar, se puede mostrar que $\text{cl}(B) = B$. □

Corolario 10. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea E un subconjunto abierto desconexo de X . Entonces, existen subconjuntos abiertos no vacíos A, B de X tales que $E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Sean $V, W \in \tau$ tales que se cumplen (1). Pongamos $A := V \cap E$, $B := W \cap E$. Entonces, $A, B \in \tau$. □

Ejemplo 11. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces, $\{x\}$ es un subconjunto conexo de X . En efecto, si $\{x\} = A \cup B$, donde $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $A = \{x\} = B$, y luego $A \cap \text{cl}(B) = \text{cl}(A) \cap B \neq \emptyset$.

Ejemplo 12. Sea $X = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ se considera con la topología usual. Entonces, el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$ es desconexo:

$$E = (3, 4) \cup (4, 5).$$

Para demostrar que E es desconexo, podemos usar la Proposición 8 con

$$A = (3, 4), \quad B = (4, 5).$$

Notemos que en este ejemplo $\text{cl}(A) \cap \text{cl}(B) \neq \emptyset$.

Componentes conexas

Proposición 13. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Denotemos por Φ_x al conjunto de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x . Pongamos

$$E := \cup \Phi_x.$$

Entonces, E es conexo y $x \in E$.