Funciones complejas medibles

Objetivos. Estudiar funciones medibles con valores complejos.

Requisitos. σ-álgebras, la preimagen de un conjunto bajo una función, funciones medibles con valores en un espacio topológico, todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ es una unión numerable de rectángulos abiertos, medibilidad de funciones con valores reales.

1 Teorema (sobre la composición de dos funciones medibles con una función continua de dos argumentos, repaso)**.** *Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$, sea Y un espacio topológico y sea $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$. Definimos*

$$h\colon X \to Y, \qquad h(x) \coloneqq \Phi(f(x), g(x)),$$

Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$.

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible.

2 Proposición (criterio de medibilidad de una función compleja)**.** *Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces*

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \iff \qquad \operatorname{Re}(f) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}).$$

3 Ejercicio (la medibilidad del valor absoluto de una función compleja medible)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que es medible la función $|f|$, definida mediante le siguiente regla:

$$|f|(x) = |f(x)| \qquad \forall x \in X.$$

4 Ejercicio. Sea $X = \{0, 1, 2\}$ y sea $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{0\}, \{1, 2\}, X\}$. Construir una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ tal que

$$f \notin \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \qquad |f| \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}).$$

5 Ejercicio (sobre la descomposición polar de una función compleja medible)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demostrar que existe $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $|g| = 1$ y $f = g|f|$.

6 Proposición (la suma y el producto de dos funciones complejas medibles son medibles)**.** *Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles. Entonces $f + g$ y fg son $\mathcal{F}$-medibles.*

7 Proposición (el límite puntual de una sucesión de funciones complejas medibles es medible)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Supongamos que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Lo denotemos por $g(x)$. Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.*