

Álgebra compleja \mathbb{C}^n

Objetivos. En el espacio vectorial \mathbb{C}^n introducir la multiplicación por componentes y mostrar que \mathbb{C}^n con esta operación es una álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad. Describir el grupo de los elementos invertibles del álgebra \mathbb{C}^n y demostrar una fórmula para el espectro del elemento de \mathbb{C}^n .

Prerrequisitos. Haber estudiado los conceptos básicos de álgebra lineal, especialmente espacios vectoriales complejos, operaciones con matrices, la invertibilidad de matrices y el espectro de matrices.

Consideramos el conjunto \mathbb{C}^n , con la adición y multiplicación por escalares, definidas componente a componente:

$$a + b = [a_j + b_j]_{j=1}^n, \quad \lambda a = [\lambda a_j]_{j=1}^n \quad (a, b \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}).$$

De los cursos de álgebra lineal sabemos que \mathbb{C}^n con estas operaciones es un espacio vectorial. El vector cero de este espacio es el vector cuyas todas componentes son cero:

$$0_n = [0]_{j=1}^n.$$

Consideramos una operación más en \mathbb{C}^n , a saber, la *multiplicación por componentes*.

1 Definición (multiplicación por componentes en \mathbb{C}^n). Definimos $\odot: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante la siguiente regla:

$$a \odot b := [a_j b_j]_{j=1}^n \quad (a, b \in \mathbb{C}^n).$$

En otras palabras, esta definición significa que $a \odot b$ es un elemento de \mathbb{C}^n , y su j -ésima componente es $a_j b_j$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$a \odot b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por 1_n al vector de longitud n con todas sus componentes iguales a 1:

$$1_n = [1]_{j=1}^n.$$

En otras palabras, $1_n \in \mathbb{C}^n$ y $(1_n)_j = 1$ para cada j en $\{1, \dots, n\}$.

2 Proposición. La operación \odot es distributiva respecto a la adición por componentes, es homogénea respecto a cada uno de sus argumentos, es asociativa y conmutativa. El elemento 1_n es un elemento neutro bajo la operación \odot . En otras palabras, para cualesquiera a, b, c en \mathbb{C}^n y cualquier λ en \mathbb{C} se cumplen las siguientes identidades:

1. $a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$,
2. $(a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c$,
3. $(\lambda a) \odot b = \lambda(a \odot b)$,
4. $a \odot (\lambda b) = \lambda(a \odot b)$,
5. $a \odot 1_n = a$,
6. $1_n \odot a = a$.
7. $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$,
8. $a \odot b = b \odot a$.

Demostración. Empecemos con la propiedad conmutativa 8. Ambas expresiones $a \odot b$ y $b \odot a$ son elementos de \mathbb{C}^n . Verifiquemos que para cada j las j -ésimas componentes de estos dos vectores coinciden.

$$(a \odot b)_j \stackrel{(i)}{=} a_j b_j \stackrel{(ii)}{=} b_j a_j \stackrel{(iii)}{=} (b \odot a)_j.$$

En los pasos (i) y (iii) aplicamos la definición de la operación \odot , y en el paso (ii) la propiedad conmutativa de la multiplicación en \mathbb{C} .

Demostremos la propiedad 1, es decir, la propiedad distributiva izquierda. Dados a, b, c en \mathbb{C}^n , ambas expresiones $a \odot (b + c)$ y $a \odot b + a \odot c$ son elementos de \mathbb{C}^n . Verifiquemos que para cada j las j -ésimas componentes de estos dos vectores coinciden.

$$\begin{aligned} (a \odot (b + c))_j &\stackrel{(i)}{=} a_j (b + c)_j \stackrel{(ii)}{=} a_j (b_j + c_j) \\ &\stackrel{(iii)}{=} a_j b_j + a_j c_j \stackrel{(iv)}{=} (a \odot b)_j + (a \odot c)_j \stackrel{(v)}{=} (a \odot b + a \odot c)_j. \end{aligned}$$

En los pasos (i) y (iv) aplicamos la definición de la operación \odot , en los pasos (ii) y (v) aplicamos la definición de la adición en \mathbb{C}^n , y en el paso (iii) usamos la propiedad distributiva en \mathbb{C} .

Las demás propiedades se demuestran de manera similar. Más aún, 2, 4 y 6 salen de 1, 3 y 5, respectivamente, aplicando la propiedad conmutativa de la operación \odot . \square

3 Definición (álgebra compleja). Una *álgebra compleja* es un espacio vectorial complejo \mathcal{A} dotado con una operación binaria más, llamada *multiplicación* tal que la operación de multiplicación es distributiva por la izquierda y por la derecha, y es homogénea respecto a cada uno de sus dos argumentos. El álgebra \mathcal{A} se llama *asociativa* si la operación de multiplicación es

asociativa; se llama *conmutativa* si la operación de multiplicación es conmutativa. Un elemento neutro bajo la multiplicación en \mathcal{A} se llama *identidad* de \mathcal{A} .

Es fácil ver que si una álgebra compleja tiene una identidad, entonces esta identidad es única.

La Proposición 2 significa que \mathbb{C}^n es una álgebra compleja asociativa y conmutativa, con identidad 1_n .

Para $n = 1$, el álgebra \mathbb{C}^1 es el campo de números complejos.

El encaje canónico de \mathbb{C} en \mathbb{C}^n

4 Definición. Definimos $E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante la regla

$$E(\alpha) = \alpha 1_n \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Notemos que esta construcción se puede generalizar a cualquier álgebra compleja con identidad. A saber, si \mathcal{A} es una álgebra compleja con identidad $1_{\mathcal{A}}$, entonces la función $E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ se define mediante la regla $E(\alpha) = \alpha 1_{\mathcal{A}}$.

5 Proposición (propiedades del encaje canónico de \mathbb{C} en \mathbb{C}^n). *La función E es un monomorfismo de álgebras complejas, esto es, la función E es inyectiva, aditiva, multiplicativa y homogénea. Además, E convierte la identidad del campo \mathbb{C} en la identidad del álgebra \mathbb{C}^n .*

Demostración. Demostremos que la función E es inyectiva. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $E(\alpha) = E(\beta)$. Entonces

$$\alpha = (E(\alpha))_1 = (E(\beta))_1 = \beta.$$

Demostremos que la función E es multiplicativa. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $E(\alpha)$, $E(\beta)$, $E(\alpha)E(\beta)$ y $E(\alpha\beta)$ pertenecen a \mathbb{C}^n , y para cualquier j en $\{1, \dots, n\}$

$$(E(\alpha\beta))_j = \alpha\beta = E(\alpha)_j E(\beta)_j = (E(\alpha) \odot E(\beta))_j.$$

Con esto hemos demostrado que $E(\alpha\beta) = E(\alpha)E(\beta)$. De manera similar se demuestra que $E(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$ y $E(\alpha\beta) = \alpha E(\beta)$. Además, $E(1) = 1_n$. \square

Denotemos por e_p al vector básico que cuya p -ésima componente es 1 y las demás son 0:

$$e_p := [\delta_{p,k}]_{k=1}^n.$$

Entonces

$$1_n = \sum_{p=1}^n e_p \quad (1)$$

y

$$E(\alpha) = \sum_{p=1}^n \alpha e_p \quad (\alpha \in \mathbb{C}). \quad (2)$$

Notemos que si $n > 1$, entonces la función E no es suprayectiva. Por ejemplo, e_1 no pertenece a la imagen de E .

Elementos invertibles

6 Definición. Sea \mathcal{A} una álgebra compleja asociativa \mathcal{A} con identidad $1_{\mathcal{A}}$. Un elemento a de \mathcal{A} se llama *invertible* si existe un elemento b de \mathcal{A} tal que $ab = 1_{\mathcal{A}}$ y $ba = 1_{\mathcal{A}}$. Denotemos por $\text{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles de \mathcal{A} .

Es fácil ver que $\text{Inv}(\mathcal{A})$ es un grupo respecto a la multiplicación de \mathcal{A} , por eso $\text{Inv}(\mathcal{A})$ se conoce como el *grupo de elementos invertibles* de \mathcal{A} . En vez de $\text{Inv}(\mathcal{A})$, se usa también la notación $G(\mathcal{A})$.

En el caso $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$, la definición del conjunto de elementos invertibles se puede escribir de la siguiente manera:

$$\text{Inv}(\mathbb{C}^n) = \{a \in \mathbb{C}^n : \exists b \in \mathbb{C}^n \quad a \odot b = 1_n\}.$$

Este conjunto se puede describir de manera explícita como el conjunto de los vectores cuyas todas entradas son no nulas.

7 Proposición (descripción del conjunto de elementos invertibles del álgebra \mathbb{C}^n).

$$\text{Inv}(\mathbb{C}^n) = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n.$$

En otras palabras,

$$\text{Inv}(\mathbb{C}^n) = \{a \in \mathbb{C}^n : \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad a_j \neq 0\}.$$

Demostración. Supongamos que $a \in \text{Inv}(\mathbb{C}^n)$. Entonces existe b en \mathbb{C}^n tal que $a \odot b = 1_n$. Para cada j tenemos $a_j b_j = 1$, lo cual implica que $a_j \neq 0$.

Al revés, supongamos que $a_j \neq 0$ para cada j en $\{1, \dots, n\}$. Pongamos

$$b = \left[\frac{1}{a_j} \right]_{j=1}^n.$$

Entonces obtenemos $a \odot b = 1_n$. □

Denotemos por e_p al vector básico que cuya p -ésima componente es 1 y las demás son 0:

$$e_p := [\delta_{p,k}]_{k=1}^n.$$

Es fácil ver que si $n > 1$, entonces en el álgebra \mathbb{C}^n hay elementos no nulos no invertibles (por ejemplo, e_1, \dots, e_n), así que \mathbb{C}^n con $n > 1$ no es un campo.

Espectro

8 Definición (el espectro de un elemento de una álgebra compleja asociativa con identidad). Sea \mathcal{A} una álgebra compleja asociativa con identidad $1_{\mathcal{A}}$, y sea a un elemento de a . El *espectro* de a se define como el conjunto de todos los números complejos λ tales que el elemento $\lambda 1_{\mathcal{A}} - a$ no es invertible:

$$\text{sp}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_{\mathcal{A}} - a \notin \text{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

9 Proposición. Sea a en \mathbb{C}^n . Entonces el espectro de a es el conjunto de todas las componentes de a :

$$\text{sp}(a) = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Demostración. De la definición de las operaciones en \mathbb{C}^n y de la definición de 1_n se obtiene que

$$(\lambda 1_n - a)_j = \lambda - a_j. \quad (3)$$

Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(a) &\stackrel{(i)}{\iff} \lambda 1_n - a \notin \text{Inv}(\mathbb{C}^n) \\ &\stackrel{(ii)}{\iff} \exists j \in \{1, \dots, n\} \quad (\lambda 1_n - a)_j = 0 \\ &\stackrel{(iii)}{\iff} \exists j \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda = a_j \\ &\stackrel{(iv)}{\iff} \lambda \in \{a_1, \dots, a_n\}. \end{aligned}$$

El paso (i) es la definición del espectro, la equivalencia (ii) se obtiene por la Proposición 7, la equivalencia (iii) sale de la fórmula (3), y la equivalencia (iv) es la definición del conjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\}$. \square