Álgebra compleja $\mathbb{C}^n$

Objetivos. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ introducir la multiplicación por componentes y mostrar que $\mathbb{C}^n$ con esta operación es una álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad. Describir el grupo de los elementos invertibles del álgebra $\mathbb{C}^n$ y demostrar una fórmula para el espectro del elemento de $\mathbb{C}^n$.

Prerrequisitos. Haber estudiado los conceptos básicos de álgebra lineal, especialmente espacios vectoriales complejos, operaciones con matrices, la invertibilidad de matrices y el espectro de matrices.

Consideramos el conjunto $\mathbb{C}^n$, con la adición y multiplicación por escalares, definidas componente a componente:

$$a + b \coloneqq \big[a_j + b_j\big]_{j=1}^n, \qquad \lambda a \coloneqq \big[\lambda a_j\big]_{j=1}^n \qquad (a, b \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

De los cursos de álgebra lineal sabemos que $\mathbb{C}^n$ con estas operaciones es un espacio vectorial. El vector cero de este espacio es el vector cuyas todas componentes son cero:

$$0_n \coloneqq \big[0\big]_{j=1}^n.$$

Consideramos una operación más en $\mathbb{C}^n$, a saber, la *multiplicación por componentes*.

1 Definición (multiplicación por componentes en $\mathbb{C}^n$)**.** Definimos $\odot\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mediante la siguiente regla:

$$a \odot b \coloneqq \big[a_j b_j\big]_{j=1}^n \qquad (a, b \in \mathbb{C}^n).$$

En otras palabras, esta definición significa que $a \odot b$ es un elemento de $\mathbb{C}^n$, y su j-ésima componente es $a_j b_j$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$a \odot b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por 1_n al vector de longitud n con todas sus componentes iguales a 1:

$$1_n \coloneqq \big[1\big]_{j=1}^n.$$

En otras palabras, $1_n \in \mathbb{C}^n$ y $(1_n)_j = 1$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$.

2 Proposición. *La operación* $\odot$ *es distributiva respecto a la adición por componentes, es homogénea respecto a cada uno de sus argumentos, es asociativa y conmutativa. El elemento* 1_n *es un elemento neutro bajo la operación* $\odot$*. En otras palabras, para cualesquiera* a, b, c *en* $\mathbb{C}^n$ *y cualquier* λ *en* $\mathbb{C}$ *se cumplen las siguientes identidades:*

1. $a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$,
2. $(a + b) \odot c = a \odot c + b \odot c$,
3. $(\lambda a) \odot b = \lambda(a \odot b)$,
4. $a \odot (\lambda b) = \lambda(a \odot b)$,
5. $a \odot 1_n = a$,
6. $1_n \odot a = a$.
7. $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$,
8. $a \odot b = b \odot a$.

Demostración. Empecemos con la propiedad conmutativa 8. Ambas expresiones $a \odot b$ y $b \odot a$ son elementos de $\mathbb{C}^n$. Verifiquemos que para cada j las j-ésimas componentes de estos dos vectores coinciden.

$$(a \odot b)_j \overset{\text{(i)}}{=\!=} a_j b_j \overset{\text{(ii)}}{=\!=} b_j a_j \overset{\text{(iii)}}{=\!=} (b \odot a)_j.$$

En los pasos (i) y (iii) aplicamos la definición de la operación $\odot$, y en el paso (ii) la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{C}$.

Demostremos la propiedad 1, es decir, la propiedad distributiva izquierda. Dados a, b, c en $\mathbb{C}^n$, ambas expresiones $a \odot (b + c)$ y $a \odot b + a \odot c$ son elementos de $\mathbb{C}^n$. Verifiquemos que para cada j las j-ésimas componentes de estos dos vectores coinciden.

$$\begin{aligned}\big(a \odot (b + c)\big)_j &\overset{\text{(i)}}{=\!=} a_j (b + c)_j \overset{\text{(ii)}}{=\!=} a_j (b_j + c_j) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=\!=} a_j b_j + a_j c_j \overset{\text{(iv)}}{=\!=} (a \odot b)_j + (a \odot c)_j \overset{\text{(v)}}{=\!=} \big(a \odot b + a \odot c\big)_j.\end{aligned}$$

En los pasos (i) y (iv) aplicamos la definición de la operación $\odot$, en los pasos (ii) y (v) aplicamos la definición de la adición en $\mathbb{C}^n$, y en el paso (iii) usamos la propiedad distributiva en $\mathbb{C}$.

Las demás propiedades se demuestran de manera similar. Más aún, 2, 4 y 6 salen de 1, 3 y 5, respectivamente, aplicando la propiedad conmutativa de la operación $\odot$. $\square$

3 Definición (álgebra compleja)**.** Una *álgebra compleja* es un espacio vectorial complejo $\mathcal{A}$ dotado con una operación binaria más, llamada *multiplicación* tal que la operación de multiplicación es distributiva por la izquierda y por la derecha, y es homogénea respecto a cada uno de sus dos argumentos. El álgebra $\mathcal{A}$ se llama *asociativa* si la operación de multiplicación es asociativa; se llama *conmutativa* si la operación de multiplicación es conmutativa. Un elemento neutro bajo la multiplicación en $\mathcal{A}$ se llama *identidad* de $\mathcal{A}$.

Es fácil ver que si una álgebra compleja tiene una identidad, entonces esta identidad es única.

La Proposición 2 significa que $\mathbb{C}^n$ es una álgebra compleja asociativa y conmutativa, con identidad 1_n.

Para $n = 1$, el álgebra $\mathbb{C}^1$ es el campo de números complejos.

El encaje canónico de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^n$

4 Definición. Definimos $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mediante la regla

$$E(\alpha) \coloneqq \alpha 1_n \qquad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Notemos que esta construcción se puede generalizar a cualquier álgebra compleja con identidad. A saber, si $\mathcal{A}$ es una álgebra compleja con identidad $1_{\mathcal{A}}$, entonces la función $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ se define mediante la regla $E(\alpha) = \alpha 1_{\mathcal{A}}$.

5 Proposición (propiedades del encaje canónico de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^n$)**.** *La función E es un monomorfismo de álgebras complejas, esto es, la función E es inyectiva, aditiva, multiplicativa y homogénea. Además, E convierte la identidad del campo $\mathbb{C}$ en la identidad del álgebra $\mathbb{C}^n$.*

Demostración. Demostremos que la función E es inyectiva. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $E(\alpha) = E(\beta)$. Entonces

$$\alpha = (E(\alpha))_1 = (E(\beta))_1 = \beta.$$

Demostremos que la función E es multiplicativa. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $E(\alpha)$, $E(\beta)$, $E(\alpha)E(\beta)$ y $E(\alpha\beta)$ pertenecen a $\mathbb{C}^n$, y para cualquier j en $\{1, \ldots, n\}$

$$(E(\alpha\beta))_j = \alpha\beta = E(\alpha)_j E(\beta)_j = (E(\alpha) \odot E(\beta))_j.$$

Con esto hemos demostrado que $E(\alpha\beta) = E(\alpha)E(\beta)$. De manera similar se demuestra que $E(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$ y $E(\alpha\beta) = \alpha E(\beta)$. Además, $E(1) = 1_n$. $\square$

Denotemos por e_p al vector básico que cuya p-ésima componente es 1 y las demás son 0:

$$e_p := \left[\delta_{p,k}\right]_{k=1}^{n}.$$

Entonces

$$1_n = \sum_{p=1}^{n} e_p \tag{1}$$

y

$$E(\alpha) = \sum_{p=1}^{n} \alpha e_p \qquad (\alpha \in \mathbb{C}). \tag{2}$$

Notemos que si $n > 1$, entonces la función E no es suprayectiva. Por ejemplo, e_1 no pertenece a la imagen de E.

Elementos invertibles

6 Definición. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra compleja asociativa $\mathcal{A}$ con identidad $1_{\mathcal{A}}$. Un elemento a de $\mathcal{A}$ se llama *invertible* si existe un elemento b de $\mathcal{A}$ tal que $ab = 1_{\mathcal{A}}$ y $ba = 1_{\mathcal{A}}$. Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles de $\mathcal{A}$.

Es fácil ver que $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ es un grupo respecto a la multiplicación de $\mathcal{A}$, por eso $\operatorname{Inv}(A)$ se conoce como el *grupo de elementos invertibles* de $\mathcal{A}$. En vez de $\operatorname{Inv}(A)$, se usa también la notación $G(\mathcal{A})$.

En el caso $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$, la definición del conjunto de elementos invertibles se puede escribir de la siguiente manera:

$$\operatorname{Inv}(\mathbb{C}^n) = \left\{a \in \mathbb{C}^n\colon \quad \exists b \in \mathbb{C}^n \quad a \odot b = 1_n\right\}.$$

Este conjunto se puede describir de manera explícita como el conjunto de los vectores cuyas todas entradas son no nulas.

7 Proposición (descripción del conjunto de elementos invertibles del álgebra $\mathbb{C}^n$)**.**

$$\operatorname{Inv}(\mathbb{C}^n) = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n.$$

En otras palabras,

$$\operatorname{Inv}(\mathbb{C}^n) = \{a \in \mathbb{C}^n\colon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad a_j \neq 0\}.$$

Demostración. Supongamos que $a \in \operatorname{Inv}(\mathbb{C}^n)$. Entonces existe b en $\mathbb{C}^n$ tal que $a \odot b = 1_n$. Para cada j tenemos $a_j b_j = 1$, lo cual implica que $a_j \neq 0$.

Al revés, supongamos que $a_j \neq 0$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Pongamos

$$b = \left[\frac{1}{a_j} \right]_{j=1}^n .$$

Entonces obtenemos $a \odot b = 1_n$. $\square$

Denotemos por e_p al vector básico que cuya p-ésima componente es 1 y las demás son 0:

$$e_p := \left[\delta_{p,k} \right]_{k=1}^n .$$

Es fácil ver que si $n > 1$, entonces en el álgebra $\mathbb{C}^n$ hay elementos no nulos no invertibles (por ejemplo, $e_1, \ldots, e_n$), así que $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$ no es un campo.

Espectro

8 Definición (el espectro de un elemento de una álgebra compleja asociativa con identidad)**.** Sea $\mathcal{A}$ una álgebra compleja asociativa con identidad $1_{\mathcal{A}}$, y sea a un elemento de a. El *espectro* de a se define como el conjunto de todos los números complejos λ tales que el elemento $\lambda 1_{\mathcal{A}} - a$ no es invertible:

$$\operatorname{sp}(a) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \colon \ \lambda 1_{\mathcal{A}} - a \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{A}) \}.$$

9 Proposición. *Sea a en $\mathbb{C}^n$. Entonces el espectro de a es el conjunto de todas las componentes de a:*

$$\operatorname{sp}(a) = \{ a_1, \ldots, a_n \}.$$

Demostración. De la definición de las operaciones en $\mathbb{C}^n$ y de la definición de 1_n se obtiene que

$$(\lambda 1_n - a)_j = \lambda - a_j . \tag{3}$$

Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{sp}(a) \quad & \overset{\text{(i)}}{\iff} \quad \lambda 1_n - a \notin \operatorname{Inv}(\mathbb{C}^n) \\
& \overset{\text{(ii)}}{\iff} \quad \exists j \in \{1, \ldots, n\} \quad (\lambda 1_n - a)_j = 0 \\
& \overset{\text{(iii)}}{\iff} \quad \exists j \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda = a_j \\
& \overset{\text{(iv)}}{\iff} \quad \lambda \in \{ a_1, \ldots, a_n \}.
\end{aligned}$$

El paso (i) es la definición del espectro, la equivalencia (ii) se obtiene por la Proposición 7, la equivalencia (iii) sale de la fórmula (3), y la equivalencia (iv) es la definición del conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$. $\square$