Completez de espacios normados

Objetivos. Repasar los conceptos de sucesión de Cauchy y sucesión regular de Cauchy. Demostrar el criterio de completez para espacios normados (en términos de series convergentes).

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, sucesiones regulares de Cauchy, espacios métricos completos, criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Aplicaciones. Completez de los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ y $L^p(X, \mu)$.

1 Definición (sucesión regular de Cauchy, repaso)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *sucesión regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq 2^{-n-1}.$$

2 Proposición (criterio de completez de un espacio métrico, en términos de sucesiones regulares de Cauchy, repaso)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) X es completo, esto es, cada sucesión de Cauchy en M es convergente.

(b) Cada sucesión regular de Cauchy en X es convergente.

3 Definición (espacio de Banach)**.** Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

4 Proposición (criterio de completez para espacios normados)**.** *Sea V un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) V es completo.

(b) Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en V, si la serie numérica $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

Demostración. (a)⇒(b). Esta parte a veces se llama el *teorema de Weierstrass de la convergencia absoluta*. Supongamos que V es completo. Consideramos una serie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty. \tag{1}$$

Para cada k en $\mathbb{N}$ denotemos por S_k a la k-ésima suma parcial de la serie dada:

$$S_k \coloneqq \sum_{n\leq k} x_n.$$

Demostraremos que la sucesión $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego de la hipótesis (a) se obtendrá que esta sucesión es convergente. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (1) encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| - \sum_{n\leq m} \|x_n\| < \varepsilon,$$

esto es,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon.$$

Entonces para todo $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon.$$

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple la condición (b). Tenemos por demostrar que V es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy. Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 \coloneqq x_1, \qquad u_k \coloneqq x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-k-1} < +\infty.$$

Por la hipótesis (b), la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} d_k$ converge. Pero las sumas parciales de esta serie forman la sucesión original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n.$$

□