Completez de espacios normados
y la convergencia absoluta de series
(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

23 de septiembre de 2022

Objetivo:

- demostrar el criterio de completez para espacios normados, en términos de series convergentes.

Objetivo:

- demostrar el criterio de completez para espacios normados, en términos de series convergentes.

Prerrequisitos:

- espacios métricos completos y sucesiones regulares de Cauchy,
- convergencia de series en espacios normados.

Repaso: sucesiones regular de Cauchy

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x \in X^{\mathbb{N}}$.

Se dice que x es una sucesión regular de Cauchy, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n-1}.$$

Repaso: sucesiones regular de Cauchy

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x \in X^{\mathbb{N}}$.

Se dice que x es una **sucesión regular de Cauchy**, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n-1}.$$

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) X es completo, esto es, cada sucesión de Cauchy en (X, d) es convergente.

(b) Cada sucesión regular de Cauchy en (X, d) es convergente.

Espacio de Banach

Definición

Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

Convergencia de series en un espacio normado

Definición (la suma de una serie en un espacio normado)

Sean V un espacio normado, $x \in V^{\mathbb{N}}$, $y \in V$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge al vector y, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$, si

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - y \right\| = 0.$$

Convergencia de series en un espacio normado

Definición (la suma de una serie en un espacio normado)

Sean V un espacio normado, $x \in V^{\mathbb{N}}$, $y \in V$.

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge al vector y, y se escribe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$, si

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - y \right\| = 0.$$

Definición (serie convergente)

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, si existe y en V tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$.

Repaso: las series positivas siempre tienen una suma, finita o infinita

Proposición

Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, +\infty)$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\beta_k := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Entonces β tiene un límite en $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \beta_k.$$

Repaso: convergencia de series positivas

Proposición

Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, +\infty)$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\beta_k := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$,

(b) la sucesión β es acotada.

Repaso: convergencia de series positivas

Proposición

Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, +\infty)$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\beta_k := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$,

(b) la sucesión β es acotada.

Para demostrar la convergencia de una serie positiva,

no es necesario calcular el límite de las sumas parciales; es suficiente acotarlas.

Criterio de completez de espacios normados en términos de series

Proposición

Sea V un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V es completo.

(b) Para cada x en $V^{\mathbb{N}}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

Criterio de completez de espacios normados en términos de series

Proposición

Sea V un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V es completo.

(b) Para cada x en $V^{\mathbb{N}}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

La parte (a)$\Rightarrow$(b) se conoce como el teorema de Weierstrass sobre la convergencia absoluta de series.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que V es completo. Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\gamma := \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Definimos $s \in V^{\mathbb{N}}$, $\beta \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$,

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} x_n, \qquad \beta_k := \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\beta \to \gamma$, encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon.$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\|$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| =$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\|$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\|$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| =$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p <$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p < \varepsilon.$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p < \varepsilon.$$

Hemos mostrado que s es de Cauchy.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon$.

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p < \varepsilon.$$

Hemos mostrado que s es de Cauchy.

Luego, por la suposición (a), la sucesión s tiene un límite y.

Demostración, (a)⇒(b), final

Encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\forall p, q \geq m \qquad |\beta_p - \beta_q| < \varepsilon.$

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = \beta_q - \beta_p < \varepsilon.$$

Hemos mostrado que s es de Cauchy.

Luego, por la suposición (a), la sucesión s tiene un límite y.

Por la definición de la convergencia de series, esto significa que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| =$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\|$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| <$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| < \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k}$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| < \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} <$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| < \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} < +\infty.$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos que V es completo.

Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy.

Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| < \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} < +\infty.$$

Por la suposición (b), existe z en V tal que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = z$.

Demostración, (b)⇒(a), final

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k = z.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), final

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k = z.$$

Notamos que las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ forman la sucesión original x:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n.$$

Demostración, (b)⇒(a), final

$$u_1 := x_1, \qquad u_k := x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k = z.$$

Notamos que las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ forman la sucesión original x:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n.$$

Por lo tanto, la afirmación $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = z$ significa que $x \to z$.

Pasar de una sucesión a las sumas parciales en NumPy

```
from numpy import *
a = array([12, 13, 14, 15])
s = cumsum(a)
print(s)
print(diff(s))
d = concatenate((s[:1], diff(s)))
print(d)
print(linalg.norm(a - d))
```