Espacios métricos completos

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (sucesión de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe k en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}$ con $m, n \geq k$ se cumple la desigualdad $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

2 Definición (estimador de Cauchy de una sucesión)**.** Dada una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X, pongamos

$$\eta_a(n) \coloneqq \sup_{m\geq n} d(a_n, a_m).$$

3 Lema. *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si, $\eta_a(\eta) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

4 Proposición. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y a un punto de X tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.*

5 Definición (espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy converge.

6 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n-1}$.

7 Proposición. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

8 Proposición. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en X y sea ν una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

9 Proposición. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente ν en $\mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.*

10 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) es completo si y solo si cualquier sucesión regular de Cauchy en X converge.*