Espacios métricos completos y sucesiones de conjuntos anidados (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

3 de septiembre de 2022

Objetivo

Demostrar el criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones de conjuntos anidados cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero.

Objetivo

Demostrar el criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones de conjuntos anidados cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero.

Aplicaciones (no se incluyen en esta presentación):

- el método de bisección,
- el método de la regla falsa,
- el teorema de Baire.

Prerrequisitos

- El diámetro de un conjunto en un espacio métrico.
- Sucesiones de Cauchy.
- El medidor de Cauchy de una sucesión.
- Espacios métricos completos.

Sucesiones decrecientes de conjuntos

$\mathcal{P}(X) :=$ el conjunto potencia de X.

Sucesiones decrecientes de conjuntos

$\mathcal{P}(X) :=$ el conjunto potencia de X.

Decimos que una sucesión $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ es decreciente, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_{n+1} \subseteq G_n.$$

Sucesiones decrecientes de conjuntos

$\mathcal{P}(X) :=$ el conjunto potencia de X.

Decimos que una sucesión $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ es decreciente, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_{n+1} \subseteq G_n.$$

Lema

Sea X un conjunto y sea $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente. Entonces

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad \Big((p \leq q) \quad \Longrightarrow \quad (G_q \subseteq G_p) \Big).$$

Sucesiones decrecientes de conjuntos

$\mathcal{P}(X) :=$ el conjunto potencia de X.

Decimos que una sucesión $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ es decreciente, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_{n+1} \subseteq G_n.$$

Lema

Sea X un conjunto y sea $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente. Entonces

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad \Big((p \leq q) \quad \Longrightarrow \quad (G_q \subseteq G_p) \Big).$$

Idea de demostración: Fijar p y aplicar la inducción matemática sobre q.

Sobre sucesiones anidadas de subconjuntos cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero

Proposición

Sea X un espacio métrico completo y sea $G \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ tal que:

1) G es decreciente,
2) G_n es cerrado y no vacío para cada n en $\mathbb{N}$,
3) $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$.

Entonces $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$.

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n.

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m,$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q)$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Acotamos el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m)$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Acotamos el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m) =$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Acotamos el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m) = \sup_{p,q \geq m} d(x_p, x_q)$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Acotamos el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m) = \sup_{p,q \geq m} d(x_p, x_q) \leq$$

Demostración, inicio

Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. En este momento se usa el principio de inducción.

Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$, tenemos que

$$x_p \in G_p \subseteq G_m, \qquad x_q \in G_q \subseteq G_m,$$

así que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

Acotamos el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m) = \sup_{p,q \geq m} d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(G_m).$$

De aquí se sigue que $\gamma_x \to 0$. Luego x es de Cauchy.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$.

Hemos mostrado que $B(y, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset$.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$.

Hemos mostrado que $B(y, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset$.

Como ε es arbitrario, obtenemos que $y \in \mathrm{cl}(G_n)$.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$.

Hemos mostrado que $B(y, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset$.

Como ε es arbitrario, obtenemos que $y \in \mathrm{cl}(G_n)$.

G_n es cerrado, por eso $y \in G_n$.

Demostración, final

Hemos mostrado que x es de Cauchy.

Además, en esta proposición suponemos que el espacio X es completo.

Sea y el límite de la sucesión x.

Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \geq n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$.

Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$.

Hemos mostrado que $B(y, \varepsilon) \cap G_n \neq \emptyset$.

Como ε es arbitrario, obtenemos que $y \in \mathrm{cl}(G_n)$.

G_n es cerrado, por eso $y \in G_n$.

Como n es arbitrario, hemos mostrado que $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

La intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es unipuntual

Ejercicio.

En las condiciones de la proposición, demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es un conjunto unipuntual.

La condición $\mathrm{cl}(G_n) = G_n$ es esencial

Ejercicio.
En la proposición pedimos que los conjuntos G_n sean cerrados.
Mostrar que esta condición es esencial.
Construir un ejemplo tal que esta condición no se cumple, las demás condiciones se cumplen, y la conclusión de la proposición no se cumple.

La condición $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$ es esencial

Ejercicio.

En la proposición pedimos que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$.

Mostrar que esta condición es esencial.

Construir un ejemplo tal que esta condición no se cumple, las demás condiciones se cumplen, y la conclusión de la proposición no se cumple.

El diámetro de la cerradura coincide con el diámetro del conjunto

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(Y)) = \operatorname{diam}(Y).$$

El diámetro de la cerradura coincide con el diámetro del conjunto

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(Y)) = \operatorname{diam}(Y).$$

Usaremos el resultado de este ejercicio en la demostración de la siguiente proposición.

La propiedades de sucesiones anidadas implica la completez

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico.

Supongamos que para cada sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X, tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$.

Entonces X es completo.

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} \colon \ n \geq m\}$,

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}\colon\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}:\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X:\quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}:\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X: \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m)$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}:\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X: \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) =$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}: \ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X: \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) = \operatorname{diam}(x[\mathbb{N}_m])$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}\colon\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) = \operatorname{diam}(x[\mathbb{N}_m]) =$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}\colon\ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) = \operatorname{diam}(x[\mathbb{N}_m]) = \gamma_x(m).$$

Demostración, inicio

Sea x una sucesión de Cauchy en X.

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}: \ \ n \geq m\}$,

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X: \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Los conjuntos G_m son cerrados y no vacíos ($x_m \in G_m$).

Como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$.

Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) = \operatorname{diam}(x[\mathbb{N}_m]) = \gamma_x(m).$$

Como x es de Cauchy, $\gamma_x \to 0$.

Demostración, final

$$G_m := \mathrm{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \mathrm{cl}(\{z \in X \colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Demostración, final

$$G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Hemos mostrado que la sucesión G tiene las propiedades escritas en la suposición de la proposición.

Demostración, final

$$G_m := \mathrm{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \mathrm{cl}(\{z \in X : \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Hemos mostrado que la sucesión G tiene las propiedades escritas en la suposición de la proposición.

Concluimos que existe y tal que $y \in G_m$ para cada m en $\mathbb{N}$.

Demostración, final

$$G_m := \mathrm{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \mathrm{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Hemos mostrado que la sucesión G tiene las propiedades escritas en la suposición de la proposición.

Concluimos que existe y tal que $y \in G_m$ para cada m en $\mathbb{N}$.

Entonces

$$d(x_m, y) \leq \mathrm{diam}(G_m) = \gamma_x(m).$$

Demostración, final

$$G_m := \mathrm{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \mathrm{cl}(\{z \in X\colon \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\}).$$

Hemos mostrado que la sucesión G tiene las propiedades escritas en la suposición de la proposición.

Concluimos que existe y tal que $y \in G_m$ para cada m en $\mathbb{N}$.

Entonces

$$d(x_m, y) \leq \mathrm{diam}(G_m) = \gamma_x(m).$$

luego $d(x_m, y) \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Otra variante de demostración: suponer que x es regular de Cauchy

Ya sabemos que la completez se puede describir en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Ejercicio.

Simplificar la última demostración, suponiendo que x es regular de Cauchy.

En este caso γ_x tiene una cota superior simple.

Criterio de completez en términos de sucesiones anidadas

Ejercicio.

Unir las dos proposiciones de esta presentación en un teorema.