Comparación de la función potencia con la función exponencial y logarítmica (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-12-03

Objetivo. Demostrar que para cada $\alpha > 0$ existen $C_1(\alpha), C_2(\alpha), C_3(\alpha) > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [0, +\infty) && x^{\alpha} \le C_1(\alpha)\, \mathrm{e}^{x},\\
&\forall x \in (0, +\infty) && \ln(x) \le C_2(\alpha) x^{\alpha},\\
&\forall x \in (0, 1] && |\ln(x)| \le C_3(\alpha) x^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Objetivo. Demostrar que para cada $\alpha > 0$ existen $C_1(\alpha), C_2(\alpha), C_3(\alpha) > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [0, +\infty) \qquad & x^\alpha &\le C_1(\alpha)\, \mathrm{e}^x, \\
&\forall x \in (0, +\infty) \qquad & \ln(x) &\le C_2(\alpha) x^\alpha, \\
&\forall x \in (0, 1] \qquad & |\ln(x)| &\le C_3(\alpha) x^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Como la herramienta principal, usaremos la expansión de la función exponencial en una serie de potencias:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Expansión de exp en una serie de potencias

Hay varios caminos equivalentes para definir exp y ln.

En todos estos caminos se pueden demostrar los siguientes hechos.

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\exp' = \exp,$$

$$e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0),$$

$$b^x = e^{x \ln(b)} \qquad (x \in \mathbb{R},\ b > 0),$$

Aquí los aceptamos sin demostración.

Monotonía de las funciones exponenciales con varias bases (recordatorio)

Proposición

Sean $b > 1$, $\quad f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\quad f(t) := b^t$.

Entonces f es estrictamente creciente:

$$\forall t, u \in \mathbb{R} \qquad \big(t < u\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(b^t < b^u\big).$$

Monotonía de las funciones exponenciales con varias bases (recordatorio)

Proposición

Sean $b > 1$, $\quad f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\quad f(t) := b^t$.

Entonces f es estrictamente creciente:

$$\forall t, u \in \mathbb{R} \qquad \big(t < u\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(b^t < b^u\big).$$

Proposición

Sean $0 < b < 1$, $\quad g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\quad g(t) := b^t$.

Entonces g es estrictamente decreciente:

$$\forall t, u \in \mathbb{R} \qquad \big(t < u\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(b^t > b^u\big).$$

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_1(\alpha) > 0$ tal que para cada $x \geq 0$

$$x^\alpha \leq C_1(\alpha)\, e^x\,.$$

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_1(\alpha) > 0$ tal que para cada $x \geq 0$

$$x^\alpha \leq C_1(\alpha)\, \mathrm{e}^x\,.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq m$ (por ejemplo, $m = \lceil \alpha \rceil$). Entonces para $x \geq 1$

$$x^\alpha \leq x^m = m!\, \frac{x^m}{m!} \leq m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = m!\ \mathrm{e}^x\,.$$

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq \alpha$ (por ejemplo, $n = \lfloor \alpha \rfloor$). Entonces para $0 \leq x \leq 1$

$$x^\alpha \leq x^n = n!\, \frac{x^n}{n!} \leq n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = n!\ \mathrm{e}^x \leq m!\ \mathrm{e}^x\,.$$

La desigualdad requerida se cumple con $C_1(\alpha) := m!$. $\square$

Proposición

Para cada x en $\mathbb{R}$,

$$e^x \geq x + 1.$$

Proposición

Para cada x en $\mathbb{R}$,

$$e^x \geq x + 1.$$

Demostración. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x - x - 1$.

Analizamos la monotonía de f, usando su derivada $f'(x) = e^x - 1$.

$f \searrow$		$f \nearrow$
$f' < 0$	0	$f' > 0$

La función f alcanza su mínimo global en el punto 0, y

$$e^x - x - 1 = f(x) \geq f(0) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}). \qquad \square$$

Proposición

Para cada $t > 0$,

$$\ln(t) \leq t - 1.$$

Demostración. Pongamos $x = \ln(t)$ y aplicamos la proposición anterior:

$$t = e^{\ln(t)} = e^{x} \geq x + 1 = \ln(t) + 1.$$ □

Otra forma equivalente de esta desigualdad:

$$\ln(1 + u) \leq u \qquad (u > -1).$$

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_2(\alpha) > 0$ tal que para cada $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$\ln(x) \leq C_2(\alpha) x^{\alpha}.$$

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_2(\alpha) > 0$ tal que para cada $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$\ln(x) \leq C_2(\alpha)x^{\alpha}.$$

Demostración. Pongamos $t = x^{\alpha}$ y aplicamos la desigualdad $\ln(t) \leq t - 1$:

$$\alpha \ln(x) = \ln(x^{\alpha}) = \ln(t) \leq t - 1 \leq t = x^{\alpha}.$$

Dividimos entre α:

$$\ln(x) \leq \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}.$$

□

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_3(\alpha) > 0$ tal que para cada x en $(0, 1]$

$$|\ln(x)| \leq C_3(\alpha) x^{-\alpha}.$$

Proposición

Sea $\alpha > 0$. Entonces existe $C_3(\alpha) > 0$ tal que para cada x en $(0, 1]$

$$|\ln(x)| \leq C_3(\alpha)x^{-\alpha}.$$

Demostración. Pongamos $t = 1/x$. Entonces $t \geq 1$.
Aplicamos la desigualdad $\ln(t) \leq C_2(\alpha)t^{\alpha}$:

$$|\ln(x)| = -\ln(x) = \ln(t) \leq C_2(\alpha)t^{\alpha} = C_2(\alpha)x^{-\alpha}.$$

□