Espacios topológicos compactos, definición

Objetivos. Conocer dos definiciones equivalentes de espacios compactos (en términos de cubiertas abiertas y en términos de colecciones centradas de conjuntos cerrados).

Prerrequisitos. Cubierta, conjuntos abiertos y cerrados.

1 Definición (cubierta de un conjunto)**.** Sea X un conjunto. Una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ se llama *cubierta* de X si $X \subseteq \cup\mathcal{A}$.

2 Definición (espacio topológico compacto)**.** Un espacio topológico X se llama *compacto* si para cada cubierta abierta de X existe una subcubierta finita. Formalmente, X se llama compacto si para cada $\mathcal{A} \subseteq \tau$ con $\cup\mathcal{A} = X$ existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ es finito y $\cup\mathcal{B} = X$.

3 Definición (colección centrada)**.** Una colección de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene *propiedad de intersección finita* (o es una colección *centrada*) si para cualquier subconjunto finito $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$, el conjunto $\cap\mathcal{C}$ es no vacío.

4 Ejemplo (las colas de una sucesión forman una colección centrada)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Para cada m en $\mathbb{N}$ denotemos por Y_m la m-ésima cola de la sucesión:

$$Y_m := \{x_n\colon\ n \geq m\}.$$

Entonces la colección $\{Y_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ tiene propiedad de intersección finita.

5 Proposición (criterio de compacidad en términos de colecciones centradas de conjuntos cerrados)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y solo si, cualquier colección centrada de conjuntos cerrados tiene intersección no vacía.*

Demostración. Idea: proceder por contraposición y pasar a los complementos. Demostremos solamente la necesidad. Supongamos que X es compacto, que $\mathcal{F}$ es una colección centrada de conjuntos cerrados y que $\cap\mathcal{F} = \varnothing$. Pongamos

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X\colon\ X \setminus A \in \mathcal{F}\}.$$

Entonces $\mathcal{A} \subseteq \tau$ y $\cup\mathcal{A} = X$. Usando la suposición que X es compacto elegimos un conjunto finito $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $\cup\mathcal{B} = X$. Pongamos $\mathcal{C} = \{B \subseteq X\colon\ X \setminus A \in \mathcal{B}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es finito, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y $\cap\mathcal{C} = \varnothing$, lo cual contradice a la suposición que la colección $\mathcal{F}$ es centrada. □

6 Proposición (la imagen de un espacio compacto bajo una función continua)**.** *Sean* X *un espacio topológico compacto,* Y *un espacio topológico,* $f \in C(X, Y)$*. Entonces* $f[X]$ *es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $(A_j)_{j \in J}$ una cubierta abierta de $f[X]$. Para cada j en J encontramos un conjunto abierto W_j en Y tal que $A_j = W_j \cap f[X]$. Para cada j en J, pongamos

$$V_j \coloneqq f^{-1}[W_j].$$

Es fácil ver que $V_j = f^{-1}[A_j]$ y que $f[V_j] = A_j$. Como W_j es abierto, V_j es abierto. Además,

$$\bigcup_{j \in J} W_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[A_j] = f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} A_j\right] = f^{-1}[f[X]] = X,$$

así que la familia $(V_j)_{j \in J}$ es una cubierta abierta de X. Luego existe un subconjunto K de J tal que K es finito y $\bigcup_{j \in K} V_j = X$. Mostremos que $\bigcup_{j \in K} W_j = f[X]$.

$$f[X] = f\left[\bigcup_{j \in K} V_j\right] = \bigcup_{j \in K} f[V_j] = \bigcup_{j \in K} A_j.$$

Hemos encontrado una subcubierta finita de la cubierta abierta dada de $f[X]$. $\square$