Operadores compactos en espacios de Hilbert

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de operadores compactos en espacios de Hilbert.

Prerrequisitos. Espacios métricos totalmente acotados, espacios métricos compactos, operadores lineales acotados en espacios normados, espacios de Hilbert, operador adjunto a un operador en espacios de Hilbert.

Estos apuntes utilizan muchas ideas del libro de Conway.

En este tema trabajamos en espacios de Hilbert complejos. Algunas ideas funcionan también para espacios de Banach.

Dado un espacio normado V, denotamos por B_V a la bola unitaria abierta en V:

$$B_V \coloneqq \Big\{ v \in V \colon \ \|v\|_V < 1 \Big\}.$$

Denotamos por X_V a la bola unitaria cerrada en V:

$$X_V \coloneqq \Big\{ v \in V \colon \ \|v\|_V \le 1 \Big\}.$$

1 Definición (operador compacto)**.** Sean H, K espacios de Hilbert complejos. Una transformación lineal $T \colon H \to K$ se llama *compacta*, si $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es un subconjunto compacto de K. Denotamos por $\mathcal{B}_0(H, K)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales compactas $H \to K$.

En particular, para $K = H$, escribimos simplemente $\mathcal{B}_0(H)$ en vez de $\mathcal{B}_0(H, H)$.

2 Proposición. *Una transformación lineal $T \colon H \to K$ es compacta si, y solo si, $T[X_H]$ es un subconjunto totalmente acotado en K.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que T es compacta. Entonces, $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es compacto. Luego $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es totalmente acotado y su subconjunto $T[X_H]$ también es totalmente acotado.

$\Leftarrow$. Supongamos que $T[X_H]$ es totalmente acotado. Luego $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es totalmente acotado. Además, $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es cerrado en el espacio completo K, por eso $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es completo. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(T[X_H])$ es compacto. $\square$

3 Proposición. *Si H y K son espacios de Hilbert, entonces* $\mathcal{B}_0(H,K) \subseteq \mathcal{B}(H,K)$.

Demostración. Por la suposición, $T[X_H]$ es un subconjunto totalmente acotado en K. En particular, $T[X_H]$ es acotado. Elegimos $C \geq 0$ tal que $\|w\|_K \leq C$ para cada w en $T[X_H]$. Luego, para cada u en X_H, se tiene que $\|Tu\|_K \leq C$. Esto significa que T es acotado y $\|T\| \leq C$. □

4 Proposición. $\mathcal{B}_0(H,K)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(H,K)$.

Demostración. Se sigue del hecho que la suma de dos subconjuntos totalmente acotados es un conjunto totalmente acotado, y el producto por escalar de un conjunto totalmente acotado también es acotado. □

5 Proposición. *Sea $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}_0(H,K)$ y sea $S \in \mathcal{B}(H,K)$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \|T_m - S\| = 0.$$

Entonces, $S \in \mathcal{B}_0(H,K)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Mostremos que en K existe una ε-red finita para $S[X_H]$. Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\|T_m - S\| < \varepsilon/3$. Como T_m es compacto, existen $h_1, \ldots, h_p$ en X_H tal que

$$T_m[X_H] \subseteq V_K(\{T_m h_1, \ldots, T_m h_p\}, \varepsilon/3).$$

Mostremos que $\{Sh_1, \ldots, Sh_m\}$ es una ε-red para $S[X_H]$. Dado w en $S[X_H]$, encontramos v en X_H tal que $w = Sv$. Luego encontramos j en $\{1, \ldots, p\}$ tal que $\|T_m h_j - T_m v\|_K < \varepsilon/3$. Usando la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} \|Sh_j - Sv\|_K &\leq \|Sh_j - T_m h_j\|_K + \|T_m h_j - T_m v\|_K + \|T_m v - Sv\|_K \\ &\leq 2\|S - T_m\| + \|T_m h_j - T_m v\|_K < \varepsilon. \end{aligned}$$

□