Espacios métricos compactos

Objetivos. Estudiar el criterio de compacidad del espacio métrico.

Prerrequisitos. Espacios métricos totalmente acotados, espacios topológicos compactos.

Espacios topológicos compactos

1 Definición. Un espacio topológico X se llama *compacto* si en para cada cubierta abierta de X existe una subcubierta finita. Formalmente, si para cada $\mathcal{A} \subseteq \tau$ con $\cup\mathcal{A} = X$ existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ es finito y $\cup\mathcal{B} = X$.

2 Definición. Una colección de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene *propiedad de intersección finita* (o es una colección *centrada*) si para cualquier subconjunto finito $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$, el conjunto $\cap\mathcal{C}$ es no vacío.

3 Ejemplo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $Y_m = \{x_n\colon\ n \geq m\}$. Entonces la colección $\{Y_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ tiene propiedad de intersección finita.

4 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y solo si, cualquier colección centrada de conjuntos cerrados tiene intersección no vacía.*

Demostración. Idea: proceder por contraposición y pasar a los complementos. Demostremos solamente la necesidad. Supongamos que X es compacto, que $\mathcal{F}$ es una colección centrada de conjuntos cerrados y que $\cap\mathcal{F} = \varnothing$. Pongamos

$$\mathcal{A} \coloneqq \{A \subseteq X\colon\ X \setminus A \in \mathcal{F}\}.$$

Entonces $\mathcal{A} \subseteq \tau$ y $\cup\mathcal{A} = X$. Usando la suposición que X es compacto elegimos un conjunto finito $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $\cup\mathcal{B} = X$. Pongamos $\mathcal{C} = \{B \subseteq X\colon\ X \setminus A \in \mathcal{B}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es finito, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y $\cap\mathcal{C} = \varnothing$, lo cual contradice a la suposición que la colección $\mathcal{F}$ es centrada. $\square$

Espacios métricos compactos

5 Definición (punto de acumulación de una sucesión)**.** Sean X un espacio topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Se dice que a es un *punto de acumulación* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cualquier A en τ tal que $a \in A$ y para cada m en $\mathbb{N}$ existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ y $x_n \in A$.

6 Proposición (criterio del punto de acumulación)**.** *Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) a es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$, $a \in \operatorname{clos}(\{x_n\colon\ n \geq m\})$;

(c) existe una función creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

7 Teorema. *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es compacto;

(b) X es secuencialmente compacto, esto es, cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente;

(c) X es totalmente acotado y completo.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que X es compacto. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Pongamos

$$F_m = \operatorname{clos}(\{x_n\colon\ n \geq m\}).$$

Notamos que $\{F_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ es una colección centrada, y sus elementos son conjuntos cerrados. Sea $b \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Entonces b un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b)⇒(c). Supongamos que X es secuencialmente compacto. Entonces cada suseción en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto de Cauchy, lo cual significa que X es totalmente acotado. Además, cada sucesión de Cauchy en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto converge, lo cual significa que X es completo.

(c)⇒(a). Supongamos que X es totalmente acotado y completo, pero no es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X que no tiene subcubierta finita. Construimos en X una $1/4$-red finita D_1. Entonces $X = \bigcup_{x\in D_1} B(x, 1/4)$. Si para cada x en D_1 la bola $B(x, 1/4)$ tiene una $\mathcal{A}$-subcubierta finita, entonces X tiene una cubierta finita, lo cual contradice a la suposición. Sea $y_1 \in D_1$ tal que $B(y_1, 1/4)$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita. En el p-ésimo paso usamos el hecho que $B(y_{p-1}, 2^{-p})$ es totalmente acotado y encontramos una 2^{-p-1}-cubierta finita D_p del conjunto $B(y_{p-1}, 1/2^p)$. Sea $y_p \in D_p$ tal que $B(y_p, 2^{-p-1})$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita.

Notamos que $y_p \in B(y_{p-1}, 1/2^p)$, así que $d(y_{p-1}, y_p) < 1/2^p$. Luego $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy. Usando la hipótesis que X es completo encontramos z en X tal que $\lim_{p\to\infty} y_p = z$. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $z \in A$. Como A es abierto, hay un $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq A$. Usando los hechos que $y_p \to z$ y $1/2^p \to 0$ cuando $p \to \infty$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $d(y_p, z) < \varepsilon/2$ y $2^{-p-1} < \varepsilon/2$. Luego $B(y_p, 2^{-p-1}) \subseteq B(z, \varepsilon) \subseteq A$, asi que $B(y_p, 2^{-p-1})$ se cubre por un elemento de la colección $\mathcal{A}$. Contradicción. $\square$