Criterio de compacidad para espacios métricos

Objetivos. Establecer un criterio de compacidad del espacio métrico.

Prerrequisitos. Espacios topológicos compactos, criterio de compacidad en términos de colecciones de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita, espacios métricos totalmente acotados, puntos de acumulación de una sucesión.

Definición de espacios compactos, repaso

1 Definición (repaso: definición de espacio compacto en términos de cubiertas abiertas)**.** Un espacio topológico X se llama *compacto* si para cada $\mathcal{A} \subseteq \tau$ con $\cup\mathcal{A} = X$ existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ es finito y $\cup\mathcal{B} = X$.

2 Proposición (repaso: criterio de espacio compacto en términos de colecciones centradas de conjuntos cerrados)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y solo si, cualquier colección centrada de conjuntos cerrados tiene intersección no vacía.*

Puntos de acumulación de una sucesión, repaso

Dado un espacio topológico (X, τ) y un punto a en X, denotamos por $\tau(a)$ el conjunto de las vecindades abiertas de a:

$$\tau(a) \coloneqq \big\{A \in \tau\colon\ a \in A\big\}.$$

3 Definición (repaso: punto de acumulación de una sucesión)**.** Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Se dice que a es un *punto de acumulación* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada A en $\tau(a)$ y para cada m en $\mathbb{N}$ existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ y $x_n \in A$.

4 Proposición (repaso: criterio del punto de acumulación)**.** *Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) a es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esto es,

$$\forall V \in \tau(a) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq m \quad x_n \in V;$$

(b) para cada V en $\tau(a)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in V\}$ es infinito;

(c) para cada m en $\mathbb{N}$, $a \in \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \ge m\})$;

(d) existe una función creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

Criterio de compacidad para espacios métricos

5 Lema. *Sea X un conjunto, sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X y sea $\mathcal{C}$ una cubierta finita de X. Supongamos que para cada P en $\mathcal{C}$ existe una $\mathcal{A}$-cubierta finita de P. Entonces, X tiene una $\mathcal{A}$-cubierta finita.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, encontramos $Q_{j,1}, \ldots, Q_{j,n_j} \in \mathcal{A}$ tales que

$$P_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_j} Q_{j,k}.$$

Pongamos

$$\mathcal{F} \coloneqq \bigl\{Q_{j,k}\colon\ j \in \{1, \ldots, m\},\ k \in \{1, \ldots, n_j\}\bigr\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una colección finita de conjuntos y

$$\cup\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n_j} Q_{j,k} \supseteq \bigcup_{j=1}^{m} P_j = X. \qquad \square$$

Dado un espacio métrico (X, d), denotamos por τ_d la topología inducida por d.

6 Teorema. *Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) (X, τ_d) es compacto;

(b) (X, τ_d) es “secuencialmente compacto”, esto es, cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente;

(c) (X, d) es totalmente acotado y completo.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que X es compacto. Sea $x \in X^{\mathbb{N}}$. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos

$$F_m = \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \ge m\}).$$

Si M es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, entonces

$$x_{\text{máx}(M)} \in \bigcap_{m\in M} F_m.$$

Por lo tanto, $\{F_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ es una colección centrada. Además, sus elementos son conjuntos cerrados. Como X es compacto, esta colección tiene intersección no vacía. Sea $b \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Entonces b un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que X es secuencialmente compacto. Entonces cada suseción en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto de Cauchy, lo cual significa que X es totalmente acotado. Además, cada sucesión de Cauchy en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto converge, lo cual significa que X es completo.

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que X es totalmente acotado y completo, pero no es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X que no tiene subcubierta finita. Vamos a construir por inducción una sucesión $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que para cada p en $\mathbb{N}$ el conjunto $B(y_p, 2^{-p-1})$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita y para cada p en $\mathbb{N}$ con $p \geq 2$ se tiene que $y_{p+1} \in B(y_p, 2^{-p-1})$.

En el paso 1 construimos en X una $1/4$-red finita D_1. Entonces $X = \bigcup_{x\in D_1} B(x, 1/4)$. Si para cada x en D_1 la bola $B(x, 1/4)$ tiene una $\mathcal{A}$-cubierta finita, entonces X tiene una $\mathcal{A}$-cubierta finita, lo cual contradice a la suposición. Sea $y_1 \in D_1$ tal que $B(y_1, 1/4)$ no tiene $\mathcal{A}$-cubierta finita.

En el p-ésimo paso suponemos que y_{p-1} ya está construido y que $B(y_{p-1}, 2^{-p})$ no tiene $\mathcal{A}$-cubierta finita. Como el espacio métrico X es totalmente acotado, su subespacio métrico $B(y_{p-1}, 2^{-p})$ también es totalmente acotado. Encontramos $D_p \subseteq B(y_{p-1}, 2^{-p})$ tal que D_p es una 2^{-p-1}-red finita para el conjunto $B(y_{p-1}, 2^{-p})$, esto es,

$$B(y_{p-1}, 2^{-p}) \subseteq \bigcup_{x\in D_p} B(x, 2^{-p-1}).$$

Si para cada x en D_p el conjunto $B(x, 2^{-p-1})$ tiene una $\mathcal{A}$-subcubierta finita, entonces $B(y_{p-1}, 2^{-p})$ también tiene una $\mathcal{A}$-subcubierta finita, lo cual contradice a la hipótesis de inducción. Sea $y_p \in D_p$ tal que $B(y_p, 2^{-p-1})$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita.

Notamos que $y_p \in B(y_{p-1}, 2^{-p})$, así que $d(y_{p-1}, y_p) < 2^{-p}$. Luego $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy. Usando la hipótesis que X es completo, encontramos z en X tal que $\lim_{p\to\infty} y_p = z$. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $z \in A$. Como A es abierto, hay un $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq A$. Usando los hechos que $y_p \to z$ y $1/2^p \to 0$ cuando $p \to \infty$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $d(y_p, z) < \varepsilon/2$ y $2^{-p-1} < \varepsilon/2$. Luego $B(y_p, 2^{-p-1}) \subseteq B(z, \varepsilon) \subseteq A$, asi que $B(y_p, 2^{-p-1})$ se cubre por un elemento de la colección $\mathcal{A}$. Contradicción. $\square$