La cerradura de un conjunto en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

1 Definición. Sea $A \subseteq X$. Definimos la *cerradura* de A (respecto la métrica d) mediante la regla

$$\operatorname{cl}_d(A) \coloneqq \{x \in X\colon \quad \forall r > 0 \quad A \cap B(x, r) \neq \varnothing\}.$$

2 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces*

$$\operatorname{cl}_d(A) = \{x \in X\colon \quad \forall V \in \tau_d \quad (x \in V) \quad \Rightarrow \quad A \cap V \neq \varnothing\}.$$

En lo que sigue, en vez de $\operatorname{cl}_d(A)$ escribimos simplemente $\operatorname{cl}(A)$.

3 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces $X \setminus \operatorname{cl}(A) = \operatorname{int}(X \setminus A)$.*

Otras formas equivalentes de la Proposición 11:

$$\operatorname{cl}(A) = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A), \quad \operatorname{int}(B) = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus B).$$

4 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces $A \subseteq \operatorname{cl}(A)$.*

5 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces $\operatorname{cl}(A)$ es un conjunto cerrado.*

6 Proposición. *Sea $A \subseteq X$ tal que A es un conjunto cerrado. Entonces $\operatorname{cl}(A) = A$.*

7 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si, y solo si, $\operatorname{cl}(A) = A$.*

8 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$.*

9 Proposición. *Sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Entonces*

$$\operatorname{cl}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{cl}(A_1) \cup \operatorname{cl}(A_2).$$

10 Proposición. *Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Y \subseteq Z$. Entonces $\operatorname{cl}(Y) \subseteq \operatorname{cl}(Z)$.*

11 Proposición. *Sea $A \subseteq X$ y sea F un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Entonces $\operatorname{cl}(A) \subseteq F$.*

12 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces $\operatorname{cl}(A)$ es el más pequeño entre todos los subconjuntos cerrados que contienen al conjunto A.*

13 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces*

$$\operatorname{cl}(A) = \cup \mathcal{F}, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{F} = \{B \subseteq X\colon \quad X \setminus B \in \tau_d \quad \wedge \quad A \subseteq B\}.$$