El vector más cercano al origen en un conjunto convexo cerrado no vacío

Egor Maximenko, junto con
Rocio Daniela Pérez Cruz y Paolo Alejando Balam Aguilar Mata

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

21 de mayo de 2022

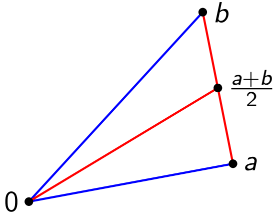
La identidad de paralelogramo y la identidad de Apolonio, repaso

Proposición

Sea H un espacio con producto interno y sean $a, b \in H$. Entonces

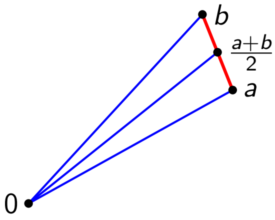
$$2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) = \|a - b\|^2 + \|a + b\|^2,$$

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a - b\|^2.$$

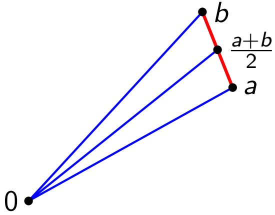


Una consecuencia de la identidad de Apolonio

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$



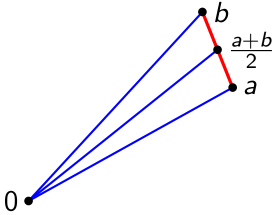
Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

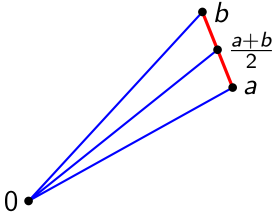
$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

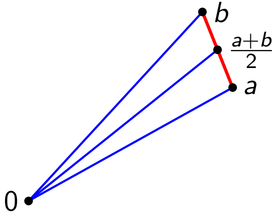
Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

$$\|a-b\| \;\approx$$

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

$$\|a-b\| \approx 0.$$

El vector más cercano al origen

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $X \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío.

Entonces existe un único vector a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

El vector más cercano al origen

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $X \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío.

Entonces existe un único vector a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Si un vector a con estas propiedades existe, entonces obviamente es único:

El vector más cercano al origen

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $X \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío.
Entonces existe un único vector a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Si un vector a con estas propiedades existe, entonces obviamente es único:
para dos candidatos diferentes a y b, obtenemos simultáneamente

El vector más cercano al origen

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $X \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío.

Entonces existe un único vector a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Si un vector a con estas propiedades existe, entonces obviamente es único:

para dos candidatos diferentes a y b, obtenemos simultáneamente

$$\|a\| < \|b\|, \qquad \|b\| < \|a\|.$$

El vector más cercano al origen

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $X \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío.

Entonces existe un único vector a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Si un vector a con estas propiedades existe, entonces obviamente es único:

para dos candidatos diferentes a y b, obtenemos simultáneamente

$$\|a\| < \|b\|, \qquad \|b\| < \|a\|.$$

Vamos a demostrar la existencia.

Demostración: elegimos una sucesión que aproxime el ínfimo de las normas

Denotemos por γ la distancia del origen al conjunto X:

$$\gamma := \operatorname{dist}(0_H, X) = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

Demostración: elegimos una sucesión que aproxime el ínfimo de las normas

Denotemos por γ la distancia del origen al conjunto X:

$$\gamma := \operatorname{dist}(0_H, X) = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

De la suposición $X \neq \emptyset$ se sigue que $\gamma < +\infty$.

Demostración: elegimos una sucesión que aproxime el ínfimo de las normas

Denotemos por γ la distancia del origen al conjunto X:

$$\gamma := \operatorname{dist}(0_H, X) = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

De la suposición $X \neq \emptyset$ se sigue que $\gamma < +\infty$.

Elegimos una sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n\| = \gamma.$$

Demostración: elegimos una sucesión que aproxime el ínfimo de las normas

Denotemos por γ la distancia del origen al conjunto X:

$$\gamma := \operatorname{dist}(0_H, X) = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

De la suposición $X \neq \emptyset$ se sigue que $\gamma < +\infty$.

Elegimos una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \gamma.$$

Una manera de razonar: para cada n en $\mathbb{N}$ encontrar v_n tal que $\|v_n\| < \gamma + \frac{1}{n}$.

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2$$

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 =$$

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \;=\; 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2 .$$

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \; = \; 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2.$$

Como X es convexo, tenemos que

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \; = \; 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4 \left\| \frac{v_m + v_n}{2} \right\|^2 .$$

Como X es convexo, tenemos que $\frac{v_m+v_n}{2} \in X$ y

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \ = \ 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2.$$

Como X es convexo, tenemos que $\frac{v_m+v_n}{2} \in X$ y $\left\|\frac{v_m+v_n}{2}\right\| \geq \gamma$.

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \;=\; 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2.$$

Como X es convexo, tenemos que $\frac{v_m+v_n}{2} \in X$ y $\left\|\frac{v_m+v_n}{2}\right\| \geq \gamma$. Luego

$$0 \leq \|v_m - v_n\|^2 \;\leq 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\gamma^2.$$

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \ = \ 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2.$$

Como X es convexo, tenemos que $\frac{v_m+v_n}{2} \in X$ y $\left\|\frac{v_m+v_n}{2}\right\| \geq \gamma$. Luego

$$0 \leq \|v_m - v_n\|^2 \ \leq 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\gamma^2.$$

Luego, por el teorema del emparedado,

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\|^2 = 0.$$

Demostración: la sucesion elegida es de Cauchy

Usamos la identidad de Apolonio para acotar la distancia entre v_m y v_n:

$$\|v_m - v_n\|^2 \ = \ 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\left\|\frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2.$$

Como X es convexo, tenemos que $\frac{v_m+v_n}{2} \in X$ y $\left\|\frac{v_m+v_n}{2}\right\| \geq \gamma$. Luego

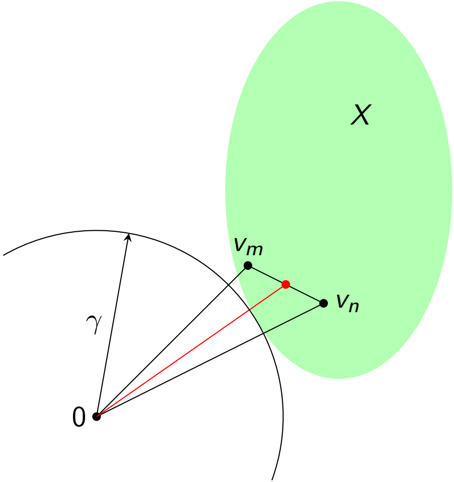
$$0 \leq \|v_m - v_n\|^2 \ \leq 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2) - 4\gamma^2.$$

Luego, por el teorema del emparedado,

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\|^2 = 0.$$

Hemos demostrado que la sucesion $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

(La idea geométrica de la demostración)



Demostración: el punto límite de la sucesión

Hemos demostrado que la sucesion $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración: el punto límite de la sucesión

Hemos demostrado que la sucesion $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Denotemos su límite por a:

$$\boxed{a := \lim_{n\to\infty} v_n.}$$

Demostración: el punto límite de la sucesión

Hemos demostrado que la sucesion $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Denotemos su límite por a:

$$\boxed{a := \lim_{n\to\infty} v_n.}$$

Como X es cerrado, $a \in X$.

Demostración: el punto límite de la sucesión

Hemos demostrado que la sucesion $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Denotemos su límite por a:

$$a := \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Como X es cerrado, $a \in X$.

Por la continuidad de la norma,

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \gamma.$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$.

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 =$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x\|^2.$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x\|^2.$$

$$\|x\|^2$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x\|^2.$$

$$\|x\|^2 =$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x\|^2.$$

$$\|x\|^2 \ = \ 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 - \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x\|^2$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2.$$

$$\|x\|^2 \;=\; 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 - \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2 \;\geq$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2.$$

$$\|x\|^2 \ = \ 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 - \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2 \ \geq \ 2\gamma^2 - \gamma^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\|\frac{x+a}{2}\right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2\left\|\frac{a+x}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-x\|^2.$$

$$\|x\|^2 \;=\; 2\left\|\frac{a+x}{2}\right\|^2 - \|a\|^2 + \frac{1}{2}\|a-x\|^2 \;\geq\; 2\gamma^2 - \gamma^2 + \frac{1}{2}\|a-x\|^2 \;>$$

Demostración: otros puntos son más lejanos del origen

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \gamma$.

Como X es convexo, tenemos $\frac{x+a}{2} \in X$. Luego

$$\left\| \frac{x+a}{2} \right\| \geq \gamma.$$

Recordamos la identidad de Apolonio para a y x:

$$\|x\|^2 + \|a\|^2 = 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2.$$

$$\|x\|^2 \ = \ 2 \left\| \frac{a+x}{2} \right\|^2 - \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2 \ \geq \ 2\gamma^2 - \gamma^2 + \frac{1}{2} \|a-x\|^2 \ > \ \gamma^2.$$

Nuestro siguiente objetivo es cambiar el origen por un punto general de H.

Algunas propiedades de traslaciones, repaso

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $v \in H$. Definimos $f\colon H \to H$,

$$f(x) := x - v.$$

Entonces f es un homeomorfismo.

Traslaciones y conjuntos convexos, repaso

Recordemos que

$$Y - v \;=\; \Big\{h \in H \colon \quad \exists y \in Y \quad h = y - v\Big\} \;=$$

Traslaciones y conjuntos convexos, repaso

Recordemos que

$$Y - v \;=\; \Big\{ h \in H\colon \quad \exists y \in Y \quad h = y - v \Big\} \;=\; \Big\{ h \in H\colon\; h + v \in Y \Big\}.$$

Traslaciones y conjuntos convexos, repaso

Recordemos que

$$Y - v \;=\; \Big\{ h \in H\colon \quad \exists y \in Y \quad h = y - v \Big\} \;=\; \Big\{ h \in H\colon\; h + v \in Y \Big\}.$$

Ejercicio.

Sea H un espacio de Hilbert, sea $v \in H$ y sea Y un subconjunto convexo de H.

Demostrar que $Y - v$ es convexo.

Existencia y unicidad del vector más cercano a un vector dado en un conjunto convexo cerrado no vacío

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, $S \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío, y sea $v \in H$. Entonces

$$\exists u \in S \qquad \forall s \in S \setminus \{u\} \qquad \|s - v\| > \|u - v\|.$$

Existencia y unicidad del vector más cercano a un vector dado en un conjunto convexo cerrado no vacío

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, $S \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío, y sea $v \in H$. Entonces

$$\exists u \in S \qquad \forall s \in S \setminus \{u\} \qquad \|s - v\| > \|u - v\|.$$

En particular, este corolario se aplica cuando S es un subespacio cerrado de H.

Existencia y unicidad del vector más cercano a un vector dado en un conjunto convexo cerrado no vacío

Corolario

Sean H un espacio de Hilbert, $S \subseteq H$, convexo, cerrado y no vacío, y sea $v \in H$. Entonces

$$\exists u \in S \qquad \forall s \in S \setminus \{u\} \qquad \|s - v\| > \|u - v\|.$$

En particular, este corolario se aplica cuando S es un subespacio cerrado de H.

Idea de demostración: trasladar el espacio de tal manera que el vector v se transforme en el origen, y aplicar el teorema.

Demostración del corolario, inicio

Definimos $f\colon H \to H$ como

$$f(x) := x - v.$$

Demostración del corolario, inicio

Definimos $f\colon H \to H$ como

$$f(x) := x - v.$$

Pongamos

$$X := S - v = f[S].$$

Demostración del corolario, inicio

Definimos $f\colon H \to H$ como

$$f(x) := x - v.$$

Pongamos

$$X := S - v = f[S].$$

Como f es un homeomorfismo, X es cerrado.

Demostración del corolario, inicio

Definimos $f\colon H \to H$ como

$$f(x) := x - v.$$

Pongamos

$$X := S - v = f[S].$$

Como f es un homeomorfismo, X es cerrado.

Además, X es convexo.

Demostración del corolario, inicio

Definimos $f\colon H \to H$ como

$$f(x) := x - v.$$

Pongamos

$$X := S - v = f[S].$$

Como f es un homeomorfismo, X es cerrado.

Además, X es convexo.

X es no vacío pues S es no vacío.

Demostración del corolario, final

Hemos visto que $X := S - v$ es cerrado, convexo y no vacío.

Demostración del corolario, final

Hemos visto que $X := S - v$ es cerrado, convexo y no vacío.

Por el teorema anterior, existe a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Demostración del corolario, final

Hemos visto que $X := S - v$ es cerrado, convexo y no vacío.

Por el teorema anterior, existe a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Pongamos

$$u :=$$

Demostración del corolario, final

Hemos visto que $X := S - v$ es cerrado, convexo y no vacío.

Por el teorema anterior, existe a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Pongamos

$$u := a + v.$$

Demostración del corolario, final

Hemos visto que $X := S - v$ es cerrado, convexo y no vacío.

Por el teorema anterior, existe a en X tal que

$$\forall x \in X \setminus \{a\} \qquad \|x\| > \|a\|.$$

Pongamos

$$u := a + v.$$

Si $s \in S$, entonces $s - v \in X$ y

$$\|s - v\| > \|a\| = \|u - v\|.$$