Teorema de la gráfica cerrada

Objetivos. Deducir el teorema de la gráfica cerrada del teorema de la función abierta.

Prerrequisitos. Teorema de la transformación lineal abierta.

1 Definición (la gráfica de una función)**.** Sean X, Y algunos conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. La *gráfica* de f se define de la siguiente manera:

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y: \quad y = f(x)\}.$$

2 Proposición. *Sean X, Y espacios vectoriales y sea $T\colon X \to Y$ una transformación lineal. Dotamos $X \times Y$ de las operaciones lineales por componentes. Entonces G_T es un subespacio vectorial de $X \times Y$.*

3 Definición. Sean X, Y algunos conjuntos. Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ mediante las siguientes reglas:

$$\pi_1((x, y)) := x, \qquad \pi_2((x, y)) := y.$$

4 Definición. Sean X, Y espacios normados. Se define el espacio normado $X \oplus^2 Y$ como el conjunto $X \times Y$ con las operaciones por componentes y con la norma

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}.$$

5 Proposición. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces $X \oplus^2 Y$ es un espacio de Banach.*

6 Proposición. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces las funciones π_1 y π_2 son transformaciones lineales acotadas.*

Demostración. La desigualdad

$$\|\pi_1((x, y))\|_X \le \|(x, y)\|$$

implica que la transformación lineal π_1 es acotada. $\square$

7 Teorema. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T\colon X \to Y$ una transformación lineal. Supongamos que su gráfica G_T es cerrada. Entonces la transformación lineal T es acotada.*

Demostración. $X \oplus^2 Y$ es un espacio de Banach, y por la suposición G_T es su subconjunto cerrado. Luego G_T es un espacio métrico completo. Además, G_T es un subespacio vectorial de $X \oplus^2 Y$. Luego G_T es un espacio de Banach.

Denotemos por P_1 a la función π_1 restringida a G_T, y por P_2 a la función π_2 restringida a G_T. Esto significa que

$$P_1((x, Tx)) = x, \qquad P_2((x, Tx)) = Tx \qquad (x \in X).$$

Entonces $P_1 \in \mathcal{B}(G_T, X)$ y $P_2 \in \mathcal{B}(G_T, Y)$. Además, la transformación lineal P_1 es biyectiva. Luego, por el teorema de la transformación lineal abierta, P_1 es una función abierta. Por consecuencia, la función P_1^{-1} es continua. Finalmente, notamos que $T = P_2 P_1^{-1}$, y T es continua por ser una composición de dos funciones continuas. □

8 Observación. La condición que G_T es cerrada se puede describir en términos de sucesiones: para cada $(u, v) \in X \times Y$ y cada sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X, si

$$\lim_{k\to\infty} x_k = u, \qquad \lim_{k\to\infty} Tx_k = v,$$

entonces $(u, v) \in G_T$, esto es, $v = Tu$.

En otras palabras, la propiedad que G_T es cerrada se puede describir de la siguiente manera:

$$\left(\exists \lim_{k\to\infty} x_k \qquad \wedge \qquad \exists \lim_{k\to\infty} Tx_k\right) \qquad \Longrightarrow \qquad T\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} Tx_k.$$

La continuidad de T parece una afirmación más fuerte:

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_k \qquad \Longrightarrow \qquad T\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} Tx_k.$$

Sin embargo, por el teorema demostrado, estas afirmaciones son equivalentes.