Caracteres de álgebras de Banach con identidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e.

1 Proposición. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal multiplicativo que no coincide con la constante* 0. *Entonces $\varphi(e) = 1$.*

Demostración. Notemos que para cada x en $\mathcal{A}$ se tiene

$$\varphi(x) = \varphi(xe) = \varphi(x)\varphi(e).$$

Por eso $\varphi(e)$ no puede ser 0. Además, $\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e)^2$, luego $\varphi(e) = 1$. $\square$

2 Definición. Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Se dice que φ es un *caracter* de $\mathcal{A}$, si φ es lineal, multiplicativo, y $\varphi(e) = 1$. Denotemos por $\Omega(\mathcal{A})$ al conjunto de los caracteres de $\mathcal{A}$.

Algunos autores usan las palabras *homomorfismo complejo* o *funcional multiplicativo* en vez de caracter.

3 Proposición. *Sea $\varphi \in \Omega(\mathcal{A})$ y sea $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Entonces $\varphi(a) \neq 0$.*

Demostración.

$$1 = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}),$$

luego $\varphi(a) \neq 0$. $\square$

4 Proposición. *Sea $\varphi \in \Omega(\mathcal{A})$ y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\varphi(a) \in \mathrm{Sp}(a)$.*

Demostración. En efecto,

$$\varphi(\varphi(a)e - a) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0,$$

por eso $\varphi(a)e - a \notin \mathrm{Inv}(A)$. $\square$

5 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\{\varphi(a)\colon\ \varphi \in \Omega(\mathcal{A})\} \subseteq \mathrm{Sp}(a)$.*

6 Proposición. *Sea* $a \in \mathcal{A}$ *y sea* $\varphi \in \Omega(\mathcal{A})$*. Entonces* $|\varphi(a)| \le r(a) \le \|a\|$*.*

7 Proposición. *Sea* $\varphi \in \Omega(\mathcal{A})$*. Entonces* $\varphi \in \mathcal{A}^*$ *y* $\|\varphi\| = 1$*.*

En este curso no demostramos y no utilizamos el siguiente teorema.

8 Teorema (Gleason, Kahane, Zelazko)**.** *Sea* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *un funcional lineal tal que* $\varphi(e) = 1$ *y* $\varphi(a) \neq 0$ *para cada* a *en* $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$*. Entonces* $a \in \Omega(\mathcal{A})$*.*

9 Ejemplo. Consideramos el álgebra $C(K)$, donde K es un compacto no vacío. Para cada x en K, el funcional de evaluación

$$\operatorname{eval}_x(a) \coloneqq a(x)$$

es un caracter de $C(K)$.

10 Proposición. *Sea* K *un compacto no vacío y sea* $\mathcal{A}$ *una subálgebra compleja con identidad del álgebra compleja con identidad* $C(K)$*. Supongamos que* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de Banach respecto a una norma que puede ser distinta de la norma-máximo. Entonces para cada* x *en* K*,* $\operatorname{eval}_x \in \Omega(C(K))$*.*

11 Ejemplo. Consideremos el álgebra del disco $A(\mathbb{D})$. Entonces los funcionales de evaluación, asociados a los puntos de $C(\operatorname{clos}(\mathbb{D}))$, son caracteres de $A(\mathbb{D})$.

12 Ejemplo. Consideremos el álgebra de Wiener $W(\mathbb{T})$. Entonces los funcionales de evaluación, asociados a los puntos de $\mathbb{T}$, son caracteres de $W(\mathbb{T})$.

13 Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Demostremos que el álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no tiene caracteres. Pongamos $E_{p,q} = e_p e_q^* = [\delta_{p,j}\delta_{q,k}]_{j,k=1}^n$. Notemos que

$$I_n = \sum_{q=1}^n E_{q,q}$$

y

$$E_{p,q}E_{q,p} = E_{p,p}, \qquad E_{q,p}E_{p,q} = E_{q,q}, \qquad E_{p,q}E_{r,s} = \delta_{q,r}E_{p,s}.$$

Si $\varphi \in \Omega(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, entonces

$$\varphi(E_{p,p}) = \varphi(E_{p,q})\varphi(E_{q,p}) = \varphi(E_{q,q}).$$

Como $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{1,1}^2) = \varphi(E_{1,1})^2$, hay dos casos.

1. $\varphi(E_{1,1}) = 0$. Entonces $\varphi(E_{q,q}) = 0$ para cada q en $\{1, \ldots, n\}$, y $\varphi(I_n) = 0$.

2. $\varphi(E_{1,1}) = 1$. En este caso $\varphi(E_{q,q}) = 1$ para cada q en $\{1, \ldots, n\}$, y $\varphi(I_n) = n$.

En ambos casos llegamos a una contradicción con la propiedad $\varphi(I_n) = 1$.