Caracteres de un álgebra de Banach con identidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e.

1 Proposición. *Sea* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *un funcional lineal multiplicativo que no coincide con la constante* 0*. Entonces* $\varphi(e) = 1$*.*

Demostración. Notemos que para cada x en $\mathcal{A}$ se tiene

$$\varphi(x) = \varphi(xe) = \varphi(x)\varphi(e).$$

Por eso $\varphi(e)$ no puede ser 0. Además, $\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e)^2$, luego $\varphi(e) = 1$. $\square$

2 Definición. Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Se dice que φ es un *caracter* de $\mathcal{A}$, si φ es lineal, multiplicativo, y $\varphi(e) = 1$. Denotemos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ al conjunto de los caracteres de $\mathcal{A}$.

Algunos autores usan las palabras *homomorfismo complejo* o *funcional multiplicativo* en vez de caracter.

3 Proposición. *Sea* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *y sea* $a \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$*. Entonces* $\varphi(a) \neq 0$*.*

Demostración.

$$1 = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}),$$

luego $\varphi(a) \neq 0$. $\square$

4 Proposición. *Sea* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *y sea* $a \in \mathcal{A}$*. Entonces* $\varphi(a) \in \operatorname{Sp}(a)$*.*

Demostración. Si $\lambda \notin \operatorname{Sp}(a)$, entonces $\lambda e - a \in \operatorname{Inv}(A)$ y

$$\varphi(\lambda e - a) = \lambda - \varphi(a) \neq 0. \qquad \square$$

5 Proposición. *Sea* $a \in \mathcal{A}$*. Entonces* $\{\varphi(a)\colon\ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \subseteq \operatorname{Sp}(a)$*.*

6 Proposición. *Sea* $a \in \mathcal{A}$ *y sea* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$*. Entonces* $|\varphi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$*.*

7 Proposición. *Sea* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$*. Entonces* $\varphi \in \mathcal{A}^*$ *y* $\|\varphi\| = 1$*.*

En este curso no demostramos y no utilizamos el siguiente teorema.

8 Teorema (Gleason, Kahane, Zelazko)**.** *Sea* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *un funcional lineal tal que* $\varphi(e) = 1$ *y* $\varphi(a) \neq 0$ *para cada* a *en* $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$*. Entonces* $a \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$*.*

9 Ejemplo. Consideramos el álgebra $C(K)$, donde K es un compacto no vacío. Para cada x en K, el funcional de evaluación

$$\operatorname{eval}_x(a) \coloneqq a(x)$$

es un caracter de $C(K)$.

10 Proposición. *Sea* K *un compacto no vacío y sea* $\mathcal{A}$ *una subálgebra compleja con identidad del álgebra compleja con identidad* $C(K)$*. Supongamos que* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de Banach respecto a una norma que puede ser distinta de la norma-máximo. Entonces para cada* x *en* K*,* $\operatorname{eval}_x \in \mathcal{M}(C(K))$*.*

11 Ejemplo. Consideremos el álgebra del disco $A(\mathbb{D})$. Entonces los funcionales de evaluación, asociados a los puntos de $C(\operatorname{clos}(\mathbb{D}))$, son caracteres de $A(\mathbb{D})$.

12 Ejemplo. Consideremos el álgebra de Wiener $W(\mathbb{T})$. Entonces los funcionales de evaluación, asociados a los puntos de $\mathbb{T}$, son caracteres de $W(\mathbb{T})$.

13 Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demostremos que el álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no tiene caracteres. Pongamos $E_{p,q} = [\delta_{p,j}\delta_{q,k}]_{j,k=1}^{n}$. Notemos que

$$I_n = \sum_{q=1}^{n} E_{q,q}$$

y

$$E_{p,q}E_{q,p} = E_{p,p}, \qquad E_{q,p}E_{p,q} = E_{q,q}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, entonces

$$\varphi(E_{p,p}) = \varphi(E_{p,q})\varphi(E_{q,p}) = \varphi(E_{q,q}).$$

Como $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{1,1}^2) = \varphi(E_{1,1})^2$, hay dos casos.

1. $\varphi(E_{1,1}) = 0$. Entonces $\varphi(E_{q,q}) = 0$ para cada q en $\{1, \ldots, n\}$, y $\varphi(I_n) = 0$.

2. $\varphi(E_{1,1}) = 1$. En este caso $\varphi(E_{q,q}) = 1$ para cada q en $\{1, \ldots, n\}$, y $\varphi(I_n) = n$.

En ambos casos llegamos a una contradicción con la propiedad $\varphi(I_n) = 1$.

14 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad Sea J un ideal izquierdo en $\mathcal{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $J \neq \mathcal{A}$;

(b) $e \notin J$;

(c) $J \cap \operatorname{Inv}(\mathcal{A}) = \varnothing$.

15 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad y sea J un ideal izquierdo propio en $\mathcal{A}$. Entonces* $\operatorname{clos}(J)$ *es un ideal izquierdo propio en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Probemos la propiedad absorbente para $\operatorname{clos}(J)$. Sean $a \in \mathcal{A}$, $b \in \operatorname{clos}(J)$. Encontramos una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en J tal que $u_n \to b$. Entonces $au_n \to ab$, y $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en J.

Como $J \subseteq \mathcal{A} \setminus \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ y el conjunto $\mathcal{A} \setminus \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ es abierto, obtenemos que $\operatorname{clos}(J) \subseteq \mathcal{A} \setminus \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$. En particular, $e \notin J$. □

16 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad y sea J un ideal máximo propio en $\mathcal{A}$. Entonces J es cerrado.*

17 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Entonces* $\ker(\varphi)$ *es un ideal propio máximo en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Es fácil ver que $\ker(\varphi)$ es un ideal propio. Mostremos que es máximo. Supongamos que J es un ideal tal que $\ker(\varphi) \subsetneq J$. Sea $a \in J \setminus \ker(\varphi)$. Entonces

$$e = \left(e - \frac{1}{\varphi(a)}a\right) + \frac{1}{\varphi(a)}a \in J,$$

así que $J = \mathcal{A}$. □

18 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea J un ideal propio máximo en $\mathcal{A}$. Entonces existe $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $J = \ker(\varphi)$.*

Demostración. Ya sabemos que J es cerrado. Por eso $\mathcal{A}/J$ es un álgebra de Banach con identidad $e + J$.

Mostremos que $\mathcal{A}/J$ es un álgebra de división. Sea $B \in \mathcal{A}/J$, $B \neq J$. Elegimos $b \in B$. Entonces $B = b + J$ y $b \notin J$. Consideremos el conjunto $C := b\mathcal{A} + J$. Es fácil ver que C es un subespacio de $\mathcal{A}$, tiene la propiedad absorbente bajo la multiplicación, $J \subseteq C$. Como J es un ideal máximo de $\mathcal{A}$, concluimos que $C = \mathcal{A}$. Por lo tanto, existe c en $\mathcal{A}$ tal que $bc - e \in J$, y $B \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A}/J)$.

Por el teorema de Gelfand–Mazur, $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}(e+J)$. En otras palabras, la función $Q\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}/J$, $Q(\lambda) := \lambda e + J$, es un isomorfismo isométrico de álgebras de Banach.

Denotemos por $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$ a la proyección canónica: $P(a) := a + J$.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como $\varphi := Q^{-1}P$. Entonces $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Además,

$$\varphi(a) = 0 \quad\iff\quad Q^{-1}(a+J) = 0 \quad\iff\quad a + J = J \quad\iff\quad a \in J,$$

así que $\ker(\varphi) = J$. $\square$

19 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Demostración. Para cada a en $\mathcal{A}$ tenemos

$$(\varphi_1(a) - \varphi_2(a))e = (a - \varphi_2(a)e) - (a - \varphi_1(a)e) \in J - J = J.$$

Luego $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$. $\square$

20 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces la función $\varphi \mapsto \ker(\varphi)$ es una biyección entre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ y el conjunto de los ideales maximales propios de $\mathcal{A}$.*

El conjunto $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ se considera con la topología inducida por la topología débil-$*$ del espacio dual $\mathcal{A}^*$.

21 Proposición. *$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración. Denotemos por C a la bola unitaria cerrada en $\mathcal{A}^*$, con la topología inducida por la topología débil-$*$ de $\mathcal{A}^*$. Entonces C es de Hausdorff, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq C$, luego $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es de Hausdorff.

Si $(\psi_j)_{j\in J}$ es una red en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ que converge a un elemento φ en C, entonces

$$\varphi(ab) = \lim_{j\in J} \psi_n(ab) = \lim_{j\in J} \big(\psi_n(a)\psi_n(b)\big) = \left(\lim_{j\in J} \psi_n(a)\right)\left(\lim_{j\in J} \psi_n(b)\right) = \varphi(a)\varphi(b).$$

De manera similar, $\varphi(e) = 1$. Hemos demostrado que el conjunto $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrado en C. Por el teorema de Banach–Alaoglu, C es compacto. Luego $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es compacto. $\square$