

Caracteres del grupo de los reales

Definición 1. Para cada ξ en \mathbb{R} , denotemos por χ_ξ a la función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$,

$$\chi_\xi(x) := e^{2\pi i \xi x}.$$

Lema 2. Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que para cada x en \mathbb{R} se cumple la igualdad

$$\exp(xw) = 1.$$

Entonces, $w = 0$.

Demostración. Derivamos la identidad respecto a x :

$$w \exp(xw) = 0.$$

Como $\exp(xw) \neq 0$, $w = 0$. □

Las siguientes proposiciones se demuestran fácilmente.

Proposición 3. Para cada ξ en \mathbb{R} , la función χ_ξ es un caracter del grupo \mathbb{R} .

Demostración. Primero notamos que χ_ξ toma valores en \mathbb{T} . Como la función \exp es continua y la operación de multiplicación en \mathbb{R} es continua, la función φ_ξ es continua. Verifiquemos que χ_ξ es un homomorfismo usando la propiedad principal de la función exponencial:

$$\chi_\xi(x + y) = e^{2\pi i \xi(x+y)} = e^{2\pi i \xi x} + e^{2\pi i \xi y} = e^{2\pi i \xi x + 2\pi i \xi y} = \chi_\xi(x)\chi_\xi(y). \quad \square$$

Proposición 4. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\chi_\xi = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Entonces, $\xi = 0$.

Demostración. Este resultado se obtiene directamente del Lema 2. □

Teorema 5. Sea γ un caracter del grupo \mathbb{R} . Entonces, existe un ξ en \mathbb{R} tal que $\gamma = \chi_\xi$.

Demostración. I. Mostremos que existe un $a > 0$ tal que

$$\int_0^a \gamma(y) dy \neq 0. \quad (1)$$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que para cada $a > 0$ la integral es nula:

$$\int_0^a \gamma(y) dy = 0.$$

Aplicando el teorema fundamental de cálculo derivemos esta identidad respecto a la variable a . Obtenemos que $\gamma(a) = 0$ para cada $a > 0$, lo cual contradice a la propiedad $|\gamma(a)| = 1$.

II. Sea $a > 0$ tal que se cumple (1). Entonces,

$$\int_x^{x+a} \gamma(y) dy = \int_0^a \gamma(x+y) dy = \gamma(x) \int_0^a \gamma(y) dy.$$

Luego

$$\gamma(x) = \frac{\int_x^{a+x} \gamma(y) dy}{\int_0^a \gamma(y) dy} = \frac{\int_a^{a+x} \gamma(y) dy - \int_a^x \gamma(y) dy}{\int_0^a \gamma(y) dy}.$$

Por el teorema fundamental de cálculo, el numerador del último cociente es una función derivable, y su derivada es $\gamma(a+x) - \gamma(x)$. Luego γ es derivable.

III. Derivando la identidad

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$$

respecto a y , obtenemos

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y).$$

En particular, para $y = 0$,

$$\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x).$$

Denotemos $\gamma'(0)$ por s . Entonces

$$\gamma'(x) = s\gamma(x), \quad \gamma(0) = 1.$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que esta ecuación tiene una única solución

$$\gamma(x) = e^{sx}.$$

VI. Recordamos que $|\gamma(x)| = 1$. Luego para cada x en \mathbb{R}

$$e^{\operatorname{Re}(s)x} = 1.$$

Por el Lema 2, $\operatorname{Re}(s) = 0$. Entonces s , es un número puramente imaginario, y existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $s = 2\pi\xi i$. \square

Proposición 6. La función $K: \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ definida mediante la regla

$$K(\xi) = \varkappa_\xi \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. La Proposición 3 nos asegura que K realmente toma valores en $\widehat{\mathbb{R}}$. Usando la propiedad principal de la función exponencial es fácil verificar que K es un homomorfismo, esto es, $K(\xi + \eta) = K(\xi)K(\eta)$ para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. La Proposición 4 significa que el homomorfismo K es inyectivo, y el Teorema 5 dice que K es suprayectivo. \square

En realidad, la función K de la proposición anterior es no solamente isomorfismo, sino también homeomorfismo, pero no lo demostramos porque no estudiamos bien la topología en el grupo dual.