Caracteres del grupo de los reales

Definición 1. Para cada ξ en $\mathbb{R}$ denotemos por $\varkappa_\xi$ a la función $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\varkappa_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}.$$

Lema 2. *Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que para cada x en $\mathbb{R}$*

$$\exp(xw) = 1.$$

Entonces $w = 0$.

Demostración. Derivamos la identidad respecto a x:

$$w \exp(xw) = 0.$$

Como $\exp(xw) \neq 0$, $w = 0$. □

Las siguientes proposiciones se demuestran fácilmente.

Proposición 3. *Para cada ξ en $\mathbb{R}$, la función $\varkappa_\xi$ es un caracter del grupo $\mathbb{R}$.*

Demostración. Primero notamos que $\varkappa_\xi$ toma valores en $\mathbb{T}$. Como la función exp es continua y la operación de multiplicación en $\mathbb{R}$ es continua, la función φ_ξ es continua. Verificamos que $\varkappa_\xi$ es un homomorfismo usando la propiedad principal de la función exponencial:

$$\varkappa_\xi(x + y) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi(x+y)} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} + \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi y} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x + 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi y} = \varkappa_\xi(x)\varkappa_\xi(y).$$ □

Proposición 4. *Sea $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\varkappa_\xi = 1_{\mathbb{R}}$. Entonces $\xi = 0$.*

Demostración. Este resultado se obtiene directamente del Lema 2. □

Teorema 5. *Sea γ un caracter del grupo $\mathbb{R}$. Entonces existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma = \varkappa_\xi$.*

Demostración. I. Mostremos que existe un $a > 0$ tal que

$$\int_0^a \gamma(y)\,dy \neq 0. \tag{1}$$

Supongamos lo contrario, es decir, que para cada $a > 0$ la integral es nula:

$$\int_0^a \gamma(y)\,dy = 0.$$

Aplicando el teorema fundamental de cálculo derivemos esta identidad respecto a la variable a. Obtenemos que $\gamma(a) = 0$ para cada $a > 0$, lo cual contradice a la propiedad $|\gamma(a)| = 1$.

II. Sea $a > 0$ tal que se cumple (1). Entonces

$$\int_x^{x+a} \gamma(y)\,dy = \int_0^a \gamma(x+y)\,dy = \gamma(x)\int_0^a \gamma(y)\,dy.$$

Luego

$$\gamma(x) = \frac{\int_x^{a+x}\gamma(y)\,dy}{\int_0^a \gamma(y)\,dy} = \frac{\int_{a+x}\gamma(y)\,dy - \int_x \gamma(y)\,dy}{\int_0^a \gamma(y)\,dy}.$$

Por el teorema fundamental de cálculo, el numerador del último cociente es una función derivable, y su derivada es $\gamma(a+x) - \gamma(x)$. Luego γ es derivable.

III. Derivando la identidad

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$$

respecto a y obtenemos

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y).$$

En particular, para $y = 0$,

$$\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x).$$

Denotemos $\gamma'(0)$ por s. Entonces

$$\gamma'(x) = s\gamma(x), \qquad \gamma(0) = 1.$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que esta ecuación tiene una única solución

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{sx}.$$

VI. Recordamos que $|\gamma(x)| = 1$. Luego para cada x en $\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(s)x} = 1.$$

Por el Lema 2, $\mathrm{Re}(s) = 0$. Entonces s es un número puro imaginario, y existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $s = 2\pi\xi\,\mathrm{i}$. □

Proposición 6. *La función $K\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ definida mediante la regla*

$$K(\xi) = \varkappa_\xi \qquad (\xi \in \mathbb{R}),$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. La Proposición 3 nos asegura que K realmente toma valores en $\widehat{\mathbb{R}}$. Usando la propiedad principal de la función exponencial es fácil verificar que K es un homomorfismo, esto es, $K(\xi+\eta) = K(\xi)K(\eta)$ para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. La Proposición 4 significa que el homomorfismo K es inyectivo, y el Teorema 5 dice que K es suprayectivo. □

En realidad, la función K de la proposición anterior es no solamente isomorfismo, sino también homeomorfismo, pero no lo demostramos porque no estudiamos bien la topología en el grupo dual.