El espacio de caracteres del álgebra de matrices de Toeplitz triangulares inferiores

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada vector $a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]^\top$ en $\mathbb{C}^n$, denotemos por $T(a)$ a la matriz triangular inferior de Toeplitz

$$T(a) \coloneqq [a_{j-k}]_{j,k=0}^{n-1},$$

donde ponemos $a_q = 0$ cuando $q < 0$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$T(a) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por $\mathcal{T}_n$ al conjunto de todas las matrices de la forma $T(a)$ con a en $\mathbb{C}^n$. Consideramos $\mathcal{T}_n$ como una subálgebra de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Proposición. *Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces $T_n(a)T_n(b) = T_n(c)$, donde*

$$c_q = \sum_{j=0}^{q} a_{q-j} b_j \qquad (q \in \{0, \ldots, n-1\}).$$

Demostración. Sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$.

$$(T_n(a)T_n(b))_{p,q} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{p-k} b_{k-q} = \sum_{k=q}^{p} a_{p-k} b_{k-q}.$$

Si $p < q$, entonces el conjunto $\{k \in \mathbb{Z}\colon\ q \le k \le p\}$ es vacío, y la suma es cero. Si $p \ge q$, entonces con el cambio de variable $j = k - q$ obtenemos

$$(T_n(a)T_n(b))_{p,q} = \sum_{j=0}^{p-q} a_{p-q-j} b_j = c_{p-q}. \qquad \square$$

2 Proposición. *$\mathcal{T}_n$ es una subálgebra de Banach del álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Más aún, $\mathcal{T}_n$ tiene identidad I_n y es conmutativa.*

Denotemos por G a la matriz $T(e_1)$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Proposición. *Sea* $a \in \mathbb{C}^n$. *Entonces* $T(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k G^k$.

En particular, esta proposición implica que el álgebra $\mathcal{T}_n$ está generada por I_n y G (en otras palabras, es el álgebra con identidad generada por G).

Denotemos por φ_0 a la función $\mathcal{T}_n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_0(T(a)) \coloneqq a_0.$$

Por ejemplo, para $n = 3$,

$$\varphi_0\left(\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}\right) = a_0.$$

La función φ_0 también se puede definir como $\varphi_0(A) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)$.

4 Proposición. $\mathcal{M}(\mathcal{T}_n) = \{\varphi_0\}$.

Demostración. 1. Mostremos que $\varphi_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_n)$. Es obvio que la función φ_0 es lineal. Si $a, b \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\varphi_0(T(a)T(b)) = a_0 b_0 = \varphi_0(T(a))\varphi_0(T(b)).$$

Además, $\varphi_0(I_n) = \varphi_0(T(e_0)) = 1$.

2. Sea $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_n)$. Mostremos que $\psi = \varphi_0$. Como $G^n = 0_{n\times n}$, obtenemos que

$$\psi(G)^n = \psi(G^n) = 0.$$

Por eso $\psi(G) = 0$. Para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi(G^k) = a_0 \psi(G^0) = a_0 = \varphi_0(a). \qquad \square$$

Podemos describir la transformada de Gelfand en $\mathcal{T}_n$. Notemos que el álgebra de Banach $C(\{\varphi_0\})$ es isométricamente isomorfa al álgebra $\mathbb{C}$.

5 Proposición. *Para cada* a *en* $\mathbb{C}^n$,

$$\Gamma(T(a))(\varphi_0) = a_0.$$

6 Proposición. Γ *es suprayectiva, no es inyectiva y no es isométrica.*

Notemos que en este ejemplo el espacio de caracteres $\mathcal{M}(\mathcal{T}_n)$ es muy pobre, este espacio es suficiente para caracterizar la invertibilidad en el álgebra $\mathcal{T}_n$. En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$, la matriz $T(a)$ es invertible si, y solo si, $\varphi_0(T(a)) \neq 0$.