El espacio de caracteres del álgebra del disco

Consideremos el álgebra $A(\mathbb{D})$. Recordemos que $A(\mathbb{D})$ es una subálgebra de $C(\operatorname{clos}(\mathbb{D}))$ que consiste de todas las funciones f en $C(\operatorname{clos}(\mathbb{D}))$ tales que $f_{\mathbb{D}} \in H(\mathbb{D})$.

Denotemos por g a la función monomial:

$$g(x) \coloneqq x,$$

y por $\mathcal{P}$ al conjunto de las funciones polinomiales. Los elementos de $\mathcal{P}$ son funciones de la forma

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k g^k(x),$$

esto es, funciones de la forma

$$h = \sum_{k=0}^{n} a_k g^k. \tag{1}$$

1 Lema. *$\mathcal{P}$ es denso en $A(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $f \in A(\mathbb{D})$ y sea $\varepsilon > 0$. Usando el hecho que f es uniformemente continua encontramos $\delta > 0$ tal que $|z_1 - z_2| \le \delta$ implica $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon/2$. Podemos suponer que $\delta < 1$. Pongamos $r = 1 - \delta$,

$$f_r(z) \coloneqq f(rz).$$

Entonces $f_r \in A(\mathbb{D})$ y $\|f_r - f\| < \varepsilon/2$. Más aún, f_r es holomorfa en $(1/r)\mathbb{D}$. Por lo tanto, la serie de Taylor converge a f_r de manera uniforme en $\operatorname{clos}(\mathbb{D})$, y podemos encontrar un polinomio h tal que $\|f_r - h\| < \varepsilon/2$. $\square$

2 Lema. *Sea $z \in \operatorname{clos}(\mathbb{D})$. Entonces $\operatorname{eval}_z \in \mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$.*

Definimos $\Phi\colon \operatorname{clos}(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$ mediante la regla

$$\Phi(z) \coloneqq \operatorname{eval}_z.$$

Vamos a demostrar que Φ es un homeomorfismo.

3 Lema. *La función Φ es inyectiva.*

Demostración. Sean $z, w \in \operatorname{clos}(\mathbb{D})$ tales que $\Phi(z) = \Phi(w)$. Entonces

$$z = g(z) = \operatorname{eval}_z(g) = \Phi(z)(g) = \Phi(w)(g) = \operatorname{eval}_w(g) = g(w) = w. \qquad \square$$

4 Lema. *La función Φ es continua.*

Demostración. Sea $(z_j)_{j\in J}$ una red en $\operatorname{clos}(\mathbb{D})$ que converge a un punto w en $\operatorname{clos}(\mathbb{D})$. Para cada f en $A(\mathbb{D})$, como f es continua, tenemos que $\lim_{j\in J} f(z_j) = f(w)$, esto es, $\lim_{j\in J} \Phi(z_j)(f) = \Phi(w)(f)$. Por definición de la topología en $\mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$, esto significa que $\lim_{j\in J} \Phi(z_j) = \Phi(w)$. $\square$

5 Lema. *La función Φ es sobre.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$. Como $g \in A(\mathbb{D})$ y $\|g\| = 1$, $|\psi(g)| \le 1$. Pongamos $z \coloneqq \psi(g)$. Para cada función h de la forma (1) tenemos

$$\psi(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k \psi(g)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = h(z) = \operatorname{eval}_z(h).$$

Esto significa que $\psi|_{\mathcal{P}} = \operatorname{eval}_z|_{\mathcal{P}}$. Como ψ y eval_z son funcionales continuos y $\mathcal{P}$ es un subconjunto denso en $A(\mathbb{D})$, concluimos que $\psi = \operatorname{eval}_z$. $\square$

6 Teorema. *La función Φ es un homeomorfismo.*

7 Corolario. *Para el álgebra del disco $A(\mathbb{D})$, la transformada de Gelfand es isométrica, pero no es sobre.*

Si identificamos z con eval_z, entonces la transformada de Gelfand se puede tratar como el encaje natural del álgebra $A(\mathbb{D})$ en el álgebra $C(\operatorname{clos}(\mathbb{D}))$.