El espacio de caracteres del álgebra de convolución sobre los enteros

Consideremos el álgebra de convolución $\ell^1(\mathbb{Z})$. Pongamos

$$\widehat{a}(t) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k t^k \qquad (t \in \mathbb{T}).$$

Para cada t en $\mathbb{T}$, definimos φ_t

$$\varphi_t(a) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k t^k.$$

1 Proposición. *Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces la función $\widehat{a}$ es continua.*

Demostración. Notemos que para cada n en $\mathbb{N}$

$$|\widehat{a}(t) - \widehat{a}(u)| \le \sum_{|k|\le n} |a_k|\,|t^k - u^k| + \sum_{|k|>n} |a_k|\,|t^k - u^k| \le |t-u| \sum_{|k|\le n} |k|\,|a_k| \; + 2 \sum_{|k|>n} |a_k|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos n tal que la última suma es menor que $\varepsilon/2$, luego elegimos $\delta > 0$ tal que la penúltima suma es menor que $\varepsilon/2$ cuando $|t - u| < \delta$. □

2 Lema. *Para cada t en $\mathbb{T}$, $\varphi_t \in \mathcal{M}(\ell^1(\mathbb{Z}))$.*

Demostración. Sea $t \in \mathbb{T}$. Por el teorema de convolución (para el grupo $\mathbb{Z}$),

$$\varphi_t(a * b) = \varphi_t(a)\varphi_t(b).$$

Además, $\varphi_t(e_0) = 1_{\mathbb{T}}$. Por lo tanto, $\varphi_t \in \mathcal{M}(\ell^1(\mathbb{Z}))$. □

Definimos $\Phi\colon \mathbb{T} \to \mathcal{M}(\ell^1(\mathbb{Z}))$ por medio de la regla $\Phi(t) \coloneqq \varphi_t$.

3 Lema. *La función Φ es continua.*

Demostración. Sea $u \in \mathbb{T}$ y sea $(t_j)_{j\in J}$ una red en $\mathbb{T}$ que converge a u. Entonces para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tenemos $\widehat{a}(t_j) \to \widehat{a}(u)$, esto es, $\Phi(t_j)(a) \to \Phi(u)(a)$. Por la definición de la topología en $\mathcal{M}(\ell^1(\mathbb{Z}))$, esto significa que $\Phi(t_j) \to \Phi(u)$. □

Notemos que $\varphi_t(e_1) = t$ para cada t en $\mathbb{T}$.

4 Lema. *La función Φ es inyectiva.*

Demostración. Sean $t, u \in \mathbb{T}$ tales que $\varphi_t = \varphi_u$. Entonces $t = \varphi_t(e_1) = \varphi_u(e_1) = u$. $\square$

5 Lema. *La sucesión $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base de Schauder de $\ell^1(\mathbb{Z})$, esto es, para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ existe una única sucesión $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que*

$$\lim_{m,n\to+\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{n} b_k e_k - a \right\|_1 = 0.$$

Demostración. Unicidad. Sea $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión con esta propiedad. Sea $p \in \mathbb{Z}$. Denotemos $\sum_{k=-m}^{n} b_k e_k - a$ por $r_{m,n}$. Entonces para cada $m, n \geq |p|$ tenemos $(r_{m,n})_p = b_p - a_p$ y

$$|b_p - a_p| = |r_{m,n}| \leq \|r_{m,n}\|_1.$$

Luego $b_p = a_p$ para cada p.

Existencia. Pongamos $b_k = a_k$ para cada k. Luego

$$\|r_{m,n}\|_1 = \sum_{k<-m} |a_k| + \sum_{k>n} |a_k|.$$

Como $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la última expresión tiende a 0 cuando $m, n \to \infty$. $\square$

Denotemos por X al conjunto de las sucesiones bilaterales finitas. En otras palabras, X es el subespacio (no cerrado) generado por el conjunto $\{e_k : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

6 Lema. *X es denso en $\ell^1(\mathbb{Z})$.*

7 Lema. *Φ es sobre.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{M}(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Pongamos $t = \psi(e_1)$. Como $e_1 * e_{-1} = e_0$, obtenemos

$$\psi(e_1)\psi(e_{-1}) = 1.$$

Pero $|\psi(e_1)| \leq \|e_1\|_1 = 1$ y $|\psi(e_{-1})| \leq \|e_{-1}\|_1 = 1$, así que $|t| = |\psi(e_1)| = 1$. Esto significa que $t \in \mathbb{T}$. Para cada a en X obtenemos

$$\varphi_t(a) = \sum_{k=-m}^{n} a_k t^k = \sum_{k=-m}^{n} a_k \psi(e_1)^k = \psi\left(\sum_{k=-m}^{n} a_k e_k\right) = \psi(a).$$

Como los funcionales φ_t y ψ son continuos, y el conjunto X es denso en $\ell^1(\mathbb{Z})$, concluimos que $\psi = \varphi_t$. $\square$

8 Teorema. *Φ es un homeomorfismo.*

9 Teorema (Wiener)**.** *Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a \in \operatorname{Inv}(\ell^1(\mathbb{Z}))$ si, y solo si, la función $\widehat{a}$ no se anula.*