# El espacio de caracteres del álgebra de funciones continuas en un compacto

Sea $K$ un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Consideremos el álgebra $C(K)$. Es un álgebra de Banach conmutativa con identidad $1_K$. Vamos a demostrar que $\Omega(C(K))$ se puede identificar con $K$.

**1 Lema.** *Sea $x \in K$. Entonces* $\operatorname{eval}_x \in \Omega(C(K))$.

*Demostración.* Se verifica directamente. $\square$

Definimos $\Phi\colon K \to \Omega(C(K))$ mediante la regla

$$\Phi(x) \coloneqq \operatorname{eval}_x .$$

**2 Lema.** *La función $\Phi$ es inyectiva.*

*Demostración.* Sean $x, y \in K$, $x \neq y$. Mostremos que $\operatorname{eval}_x \neq \operatorname{eval}_y$. Por ser un espacio compacto y de Hausdorff, $X$ es normal y de Hausdorff. Los conjuntos $\{x\}$, $\{y\}$ son cerrados y disjuntos. Luego, por el lema de Uryson, existe $f$ en $C(K)$ tal que $f(x) = 1$, $f(y) = 0$. Para esta función $f$ obtenemos $\operatorname{eval}_x(f) = 1 \neq 0 = \operatorname{eval}_y(f)$. $\square$

**3 Lema.** *La función $\Phi$ es continua.*

*Demostración por redes.* Sea $(x_j)_{j\in J}$ una red en $X$ y sea $y \in X$. Supongamos que

$$\lim_{j\in J} x_j = y.$$

Entonces para cada $f$ en $C(K)$ tenemos $\lim_{j\in J} f(x_j) = f(y)$. En otras palabras, para cada $f$ en $C(K)$ tenemos

$$\lim_{j\in J} \operatorname{eval}_{x_j}(f) = \operatorname{eval}_y(f).$$

Por la definición de la topología en $\Omega(C(K))$, esto significa que $\lim_{j\in J} \operatorname{eval}_{x_j} = \operatorname{eval}_y$, esto es, $\lim_{j\in J} \Phi(x_j) = \Phi(y)$. $\square$

*Demostración por vecindades.* Sea $x \in K$ y sea $W$ una vecindad abierta de $\Phi(x)$. Por la definición de la topología débil-$*$, existen $\varepsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$ tales que

$$\{\psi \in \Omega(C(K)) : \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad |\psi(f_j) - \Phi(x)(f_j)| < \varepsilon\} \subseteq W.$$

Usando el hecho que $f_1, \ldots, f_m$ son continuas en $x$, encontramos una vecindad $V$ del punto $x$ tal que para cada $y$ en $V$ y cada $j$ en $\{1, \ldots, m\}$ se cumple $|f_j(y) - f_j(x)| < \varepsilon$. Si $y \in V$, entonces para cada $j$ en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$|\Phi(y)(f_j) - \Phi(x)(f_j)| = |f_j(y) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

así que $\Phi(y) \in W$. $\square$

**4 Lema.** *La función* $\Phi$ *es sobre.*

*Demostración.* Sea $\psi \in \Omega(C(K))$. Vamos a mostrar que existe $x$ en $K$ tal que $f(x) = 0$ para cada $f$ en $\ker(\psi)$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que para cada $x$ en $K$ existe $f_x$ en $\ker(\psi)$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Por continuidad de $f_x$, existe una vecindad abierta $V_x$ del punto $x$ tal que $f_x(y) \neq 0$ para cada $y$ en $V_x$. La familia $\{V_x : \ x \in K\}$ forma una cubierta abierta del compacto $K$. Luego existe una subcubierta finita de esta cubierta, es decir, existe una lista finita $x_1, \ldots, x_n \in K$ tal que

$$\bigcup_{p=1}^{n} V_{x_p} = K.$$

Pongamos

$$g = \sum_{p=1}^{n} f_{x_p} \overline{f_{x_p}}.$$

Entonces $\psi(g) = 0$, esto es, $g \in \ker(\psi)$. Por otro lado, para cada $y$ en $K$ existe $q$ en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in V_{x_q}$, luego

$$g(y) = \sum_{p=1}^{n} |f_{x_p}(y)|^2 \geq |f_{x_q}(y)|^2 > 0.$$

Esto significa que la función $g$ no se anula, es un elemento de $\mathrm{Inv}(C(K))$, y la igualdad $\psi(g) = 0$ no es posible.

La contradicción obtenida significa que existe $x$ en $K$ tal que $f(x) = 0$ para cada $f$ en $\ker(\psi)$.

Luego para cada $f$ en $C(K)$ tenemos $f - \psi(f)1_K \in \ker(\psi)$, $f(x) - \psi(f) = 0$, y $\psi(f) = f(x) = \mathrm{eval}_x(f)$. Concluimos que $\psi = \mathrm{eval}_x$.

Otra manera de terminar la demostración: como $\ker(\psi) \subseteq \ker(\mathrm{eval}_x)$ y $\ker(\psi)$ es un ideal maximal, $\ker(\psi) = \ker(\mathrm{eval}_x)$ y $\psi = \mathrm{eval}_x$. □

**5 Teorema.** *$\Phi$ es un homeomorfismo de espacios topológicos.*

*Demostración.* La continuidad de $\Phi^{-1}$ se obtiene gratis porque $\Omega(C(K))$ es un compacto. □

**6 Corolario.** *Para el álgebra $C(K)$, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de álgebras de Banach.*

*Demostración.* Notamos que

$$\Gamma(f)(\Phi(x)) = \Gamma(f)(\mathrm{eval}_x) = \mathrm{eval}_x(f) = f(x),$$

esto es,

$$\Gamma(f)(\psi) = f(\Phi^{-1}(\psi)).$$

En otras palabras, la función $\Gamma(f)$ se obtiene de la función $f$ por medio de un “cambio de variables”, dado por una función biyectiva. De aquí se sigue que $\Gamma$ es una biyección. También de aquí es fácil ver que $\Gamma$ preserva la norma. □

Si identificamos $\mathrm{eval}_x$ con $x$, entonces $\Gamma(f)$ se identifica con $f$.