

Productos cartesianos de conjuntos

En estos temas de análisis real usamos la palabra “rectángulos” hablando de los productos cartesianos de la forma $A \times B$, aunque A y B son conjuntos arbitrarios y no necesariamente son intervalos.

1 Proposición (criterio de vaciedad de un rectángulo). Sean A, B dos conjuntos. Entonces

$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

Demostración. Razonamos de manera contrapositiva. Demostremos la siguiente afirmación:

$$A \times B \neq \emptyset \iff A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset.$$

\Rightarrow . Supongamos que $A \times B \neq \emptyset$. Sea $(x, y) \in A \times B$. Entonces $x \in A$, $y \in B$, así que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

\Leftarrow . Supongamos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Sean $x \in A$, $y \in B$. Entonces $(x, y) \in A \times B$, así que $A \times B \neq \emptyset$. \square

2 Proposición (criterio de contención de dos rectángulos no vacíos). Sean A_1, A_2, B_1, B_2 algunos conjuntos, $E_1 := A_1 \times B_1$, $E_2 := A_2 \times B_2$. Supongamos que

$$E_1 \neq \emptyset, \quad E_2 \neq \emptyset.$$

Entonces

$$E_1 \subseteq E_2 \iff A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2.$$

Demostración. \Rightarrow . Supongamos que $E_1 \subseteq E_2$. Demostremos que $A_1 \subseteq A_2$. Sea $a \in A_1$. Usando la suposición que $E_1 \neq \emptyset$ elegimos $b \in B_1$. Entonces $(a, b) \in E_1$. Luego $(a, b) \in E_2$. Finalmente, concluimos que $a \in A_2$.

De manera similar se puede demostrar que $B_1 \subseteq B_2$.

\Leftarrow . Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2$. Demostremos que $E_1 \subseteq E_2$. Sea $(a, b) \in E_1$. Entonces $a \in A_1$, $b \in B_1$. Luego $a \in A_2$, $b \in B_2$, lo cual significa que $(a, b) \in E_2$. \square

3 Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la suposición $E_1 \neq \emptyset$ en la Proposición 2 no se puede omitir (sin esta suposición, la proposición no se cumple).

4 Proposición (criterio de igualdad de dos rectángulos no vacíos). Sean A_1, A_2, B_1, B_2 algunos conjuntos, $E_1 := A_1 \times B_1$, $E_2 := A_2 \times B_2$. Supongamos que

$$E_1 \neq \emptyset, \quad E_2 \neq \emptyset.$$

Entonces

$$E_1 = E_2 \iff (A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2).$$

Demostración. Demostremos solamente la implicación \Rightarrow . Como $E_1 \subseteq E_2$ y $E_2 \subseteq E_1$, por la Proposición 2 obtenemos

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_1, \quad B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_1. \quad \square$$

5 Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la suposición $E_1 \neq \emptyset$ en la Proposición 4 no se puede omitir (sin esta suposición, la proposición no se cumple).

6 Proposición (fórmula para la intersección de dos rectángulos). Sean A_1, A_2, B_1, B_2 algunos conjuntos. Entonces

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) & \\ \iff (a, b) \in A_1 \times B_1 \quad \wedge \quad (a, b) \in A_2 \times B_2 & \\ \iff \left((a \in A_1) \quad \wedge \quad (b \in B_1) \right) \quad \wedge \quad \left((a \in A_2) \quad \wedge \quad (b \in B_2) \right) & \\ \iff \left((a \in A_1) \quad \wedge \quad (a \in A_2) \right) \quad \wedge \quad \left((b \in B_1) \quad \wedge \quad (b \in B_2) \right) & \\ \iff a \in A_1 \cap A_2 \quad \wedge \quad b \in B_1 \cap B_2 & \\ \iff (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2). & \end{aligned}$$

Además de la definición del producto cartesiano, hemos usado la propiedad asociativa y conmutativa de la operación lógica \wedge . \square

7 Ejercicio (¿cuándo un rectángulo es una unión disjunta de dos rectángulos?). Sean $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ algunos conjuntos,

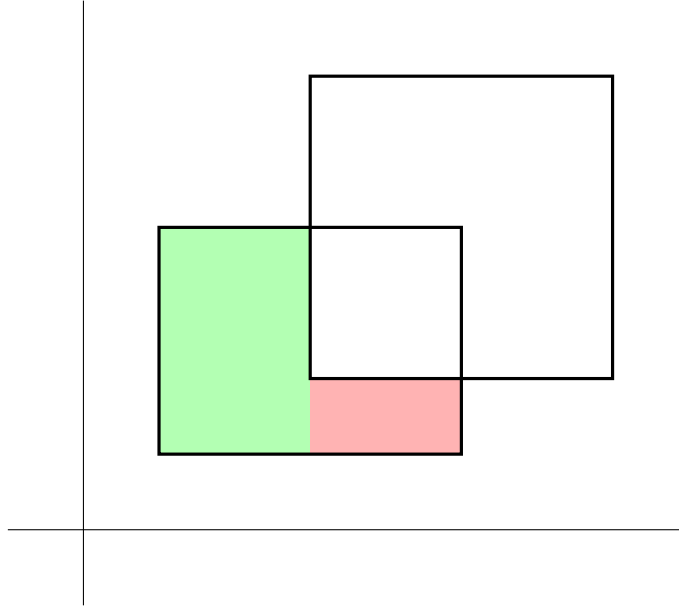
$$E_1 := A_1 \times B_1, \quad E_2 := A_2 \times B_2, \quad E_3 := A_3 \times B_3.$$

Supongamos que

$$E_1 \neq \emptyset, \quad E_2 \neq \emptyset, \quad E_3 \neq \emptyset.$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

$$E_1 \cup E_2 = E_3 \quad \wedge \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$



8 Proposición (fórmula para la diferencia de dos rectángulos). Sean A_1, A_2, B_1, B_2 algunos conjuntos. Entonces

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)). \quad (1)$$

Además,

$$((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cap ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)) = \emptyset. \quad (2)$$

Demostración. Denotemos por R_1, R_2, R_3, R_4 a los rectángulos que participan en la fórmula (1):

$$\begin{aligned} R_1 &:= A_1 \times B_1, & R_2 &:= A_2 \times B_2, \\ R_3 &:= (A_1 \setminus A_2) \times B_1, & R_4 &:= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2). \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$R_3 \cap R_4 = \emptyset, \quad R_3 \subseteq R_1 \setminus R_2, \quad R_4 \subseteq R_1 \setminus R_2.$$

De aquí sale (2) y la contención \supseteq en (1).

Demostremos la contención \subseteq en (1). Sea $(a, b) \in R_1 \setminus R_2$. La condición $(a, b) \in R_1$ significa que $a \in A_1$ y $b \in B_1$. La condición $(a, b) \notin R_2$ significa que

$$a \notin A_2 \quad \vee \quad b \notin B_2. \quad (3)$$

Consideremos dos casos posibles: 1) $a \notin A_2$, 2) $a \in A_2$.

Caso I. $a \notin A_2$. Entonces $a \in A_1 \setminus A_2$. Además, $b \in B_1$. Luego $(a, b) \in R_3$.

Caso II. $a \in A_2$. Luego, por (3), obtenemos que $b \notin B_2$. Esto significa que $a \in A_1 \cap A_2$ y $b \in B_1 \setminus B_2$, es decir, $(a, b) \in R_4$.

En ambos casos, $(a, b) \in R_3 \cup R_4$. □

9 Observación. También es válida la fórmula

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup (A_1 \times (B_1 \setminus B_2)), \quad (4)$$

pero los rectángulos en el lado derecho de (4), en general, no son disjuntos.