Funciones de variación acotada

1. Definición (partición de un intervalo). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una tupla (sucesión finita) $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ se llama *partición del intervalo* $[a, b]$, si $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$. Denotemos por $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

2. Definición (la variación de una función). Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Para toda partición $\tau \in \mathcal{P}[a, b]$, sea

$$S_{\text{abs}}(f, \tau) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

La *variación total de f en* $[a, b]$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{Var}_a^b f \coloneqq \sup_{\tau \in \mathcal{P}[a,b]} S_{\text{abs}}(f, \tau).$$

3. Definición (funciones de variación acotada). Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es *de variación acotada* en $[a, b]$, si $\operatorname{Var}_a^b f < +\infty$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ se denota por $\operatorname{BV}[a, b]$.

4. Notación (la parte positiva y la parte negativa de un número real). Para cualquier número v en $\mathbb{R}$, denotemos por v^+ y v^- su *parte positiva* y *parte negativa*:

$$v^+ \coloneqq \max(v, 0) = \begin{cases} v, & v \geq 0; \\ 0, & v < 0. \end{cases} \qquad v^- \coloneqq \min(v, 0) = \begin{cases} -v, & v \leq 0; \\ 0, & v > 0. \end{cases}$$

Notemos que $v^- \geq 0$, i.e. la parte *negativa* siempre es un número no negativo.

5. Relaciones entre un número real, su valor absoluto, su parte positiva y negativa.

$$v = v^+ - v^-, \qquad |v| = v^+ + v^-.$$

6. Definición (la variación positiva y la variación negativa de una función). Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dada una partición $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ en $\mathcal{P}[a, b]$, introduzcamos las siguientes notaciones:

$$S_+(f, \tau) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (f(\tau_k) - f(\tau_{k-1}))^+, \qquad S_-(f, \tau) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (f(\tau_k) - f(\tau_{k-1}))^-.$$

La *variación positiva* de f en $[a, b]$ se define por:

$$\operatorname{PVar}_a^b f \coloneqq \sup_{\tau \in \mathcal{P}} S_+(f, \tau).$$

La *variación negativa* de f en $[a, b]$ se define por:

$$\operatorname{NVar}_a^b f \coloneqq \sup_{\tau \in \mathcal{P}} S_-(f, \tau).$$

Variación total como seminorma

7. Ejercicio. Demuestre que Var_a^b tiene las siguientes propiedades:

$$\operatorname{Var}_a^b(f+g) \le \operatorname{Var}_a^b(f) + \operatorname{Var}_a^b(g), \qquad \operatorname{Var}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \operatorname{Var}_a^b(f).$$

8. Ejercicio. Demuestre que $\mathrm{BV}[a,b]$ es un espacio vectorial y Var_a^b es una seminorma en $\mathrm{BV}[a,b]$.

9. Ejercicio. Demuestre que $\|f\| \coloneqq |f(a)| + \operatorname{Var}_a^b(f)$ es una norma en $\mathrm{BV}[a,b]$.

Cálculo de la variación total de funciones monótonas a trozos

10. Variación de una función creciente. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^b(f) = f(b) - f(a), \qquad \operatorname{NVar}_a^b(f) = 0.$$

11. Variación de una función decreciente. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{NVar}_a^b(f) = f(a) - f(b), \qquad \operatorname{PVar}_a^b(f) = 0.$$

12. Proposición. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f).$$

Fórmulas similares también se cumplen para PVar y NVar.

Idea de demostración. Si $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{P}[a,c]$ y $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{P}[c,b]$, entonces $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{P}[a,b]$, por eso $S_{\mathrm{abs}}(f,\alpha) + S_{\mathrm{abs}}(f,\beta) \le \operatorname{Var}_a^b(f)$. Pasando al supremos sobre α y β, obtenemos

$$\operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f) \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

Por otro lado, si $(\tau_0, \ldots, \tau_n) \in \mathcal{P}[a,b]$ y $\tau_0 < \ldots < \tau_m < c < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_n$, entonces pongamos $\xi = (\tau_0, \ldots, \tau_m, c, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_n)$ y obtenemos $S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) \le S_{\mathrm{abs}}(f,\xi) \le \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f)$. Pasando al supremo sobre τ, obtenemos

$$\operatorname{Var}_a^b(f) \le \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f). \qquad \square$$

13. Ejercicio (variación de una función monótona a trozos). Sea $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ una función creciente en cada uno de los intervalos $[0,1]$, $[2,3]$, $[4,5]$ y decreciente en cada uno de los intervalos $[1,2]$ y $[3,4]$. Calcule $\operatorname{Var}_0^5(f)$, $\operatorname{PVar}_0^5(f)$ y $\operatorname{NVar}_0^5(f)$.

Relación entre la variación total, variación positiva y variación negativa

14. Proposición. Sea $f \in \mathrm{BV}[a,b]$. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b f = \operatorname{PVar}_a^b f + \operatorname{NVar}_a^b f, \tag{1}$$
$$f(b) - f(a) = \operatorname{PVar}_a^b f - \operatorname{NVar}_a^b f. \tag{2}$$

Demostración. Para toda partición τ de $[a,b]$,

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})) = S_+(f,\tau) - S_-(f,\tau),$$

i.e.

$$S_+(f,\tau) = S_-(f,\tau) + f(b) - f(a).$$

Pasando al supremo con respecto a τ en $\mathcal{P}[a,b]$, se obtiene (2). Además,

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) = S_+(f,\tau) + S_-(f,\tau) = 2S_-(f,\tau) + f(b) - f(a).$$

Pasamos al supremos sobre τ en $\mathcal{P}[a,b]$: $\operatorname{Var}_a^b f = 2\operatorname{NVar}_a^b f + f(b) - f(a)$. Aplicando (2) obtenemos (1). $\square$

Funciones de variación acotada y funciones monótonas

15. Teorema (criterio de una función de variación acotada). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es de variación acotada si y sólo si f se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes en $[a,b]$.

Demostración. 1. Sea $f \in \mathrm{BV}[a,b]$. Definamos g y h:

$$g(x) \coloneqq f(a) + \operatorname{PVar}_a^x(f), \qquad h(x) \coloneqq \operatorname{NVar}_a^x(f).$$

Entonces g y h son crecientes, y para cada x en $[a,b]$, aplicando (2) con x en vez de b, obtenemos $f(x) = g(x) - h(x)$.

2. Al revés, si $f = g - h$, donde g y h son crecientes, entonces

$$\operatorname{Var}_a^b f \le \operatorname{Var}_a^b g + \operatorname{Var}_a^b h = g(b) - g(a) + h(b) - h(a). \qquad \square$$

16. Corolario. Si $f \in \mathrm{BV}[a,b]$, entonces f' existe c.t.p.

17. Ejercicio. Sea $f \in \mathrm{BV}[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

Discontinuidades de funciones monótonas

18. Ejercicio. Construya una función creciente en $[0,1]$ que tenga un salto en cada punto racional de $[0,1]$.

19. Ejercicio. Sea f una función monótona en $[a,b]$. Entonces en todo punto $x \in (a,b)$ existen los límites laterales $f(x+0)$ y $f(x-0)$. También existen $f(a+0)$ y $f(b-0)$. Por lo tanto, f sólo puede tener discontinuidades evitables (removibles) y saltos.

20. Ejercicio. Sea f una función monótona en $[a,b]$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ el número de puntos x tales que $|f(x+0) - f(x-0)| \geq \varepsilon$ es finito. Por consecuencia, el conjunto de saltos de f es finito o numerable.

21. Ejercicio. Generalizar los resultados de los dos ejercicios anteriores al caso de una función de variación acotada.

¿Variación acotada o no acotada?

22. Ejemplo. Sea

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x\cos(1/x), & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Entonces $f \in C[0,1]$, pero $\operatorname{Var}_0^1(f) = +\infty$.

Demostración. Para un $k \in \mathbb{N}$, consideremos la partición

$$0 < \frac{1}{k\pi} < \frac{1}{(k-1)\pi} < \ldots < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Para la suma correspondiente tenemos la siguiente cota inferior:

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)\pi} - \frac{(-1)^j}{j\pi} \right| = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\pi(j+1)} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j\pi} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{1}{j}.$$

La serie harmónica diverge, por eso $\operatorname{Var}_0^1(f) = +\infty$. □

23. Ejercicio (condición de Lipschitz y variación acotada). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que f satisface en $[a,b]$ la condición de Lipschitz con la constante L:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

Demuestre que $\operatorname{Var}_a^b(f) \leq L(b-a)$.

24. Ejemplos. Para cada una de las siguientes funciones determinar si tiene variación acotada en $[0,1]$ o no. Sean

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} x^2\cos(1/x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad h(x) \coloneqq \begin{cases} x^2\cos(1/x^2), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$s(x) \coloneqq \begin{cases} x\cos(1/x^2), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad v(x) \coloneqq \begin{cases} x^3\cos(1/x), & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$