Conjuntos acotados en espacios métricos
(un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de agosto de 2022

Objetivo.

Estudiar varias descripciones equivalentes de conjuntos acotados en espacios métricos.

Prerrequisitos.

Espacios métricos, bolas en espacios métricos.

El diámetro de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sea $Y \subseteq X$.

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y) \colon\ x, y \in Y\}.$$

En el caso $Y = \emptyset$ se pone $\operatorname{diam}(Y) := 0$.

El diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(Y) \coloneqq \sup\{d(x,y)\colon\ x,y \in Y\}.$$

El diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y)\colon\ x,y \in Y\}.$$

La misma definición se puede escribir de manera más lenta, por pasos.

El diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y)\colon\ x,y \in Y\}.$$

La misma definición se puede escribir de manera más lenta, por pasos.

Primero formamos el conjunto de los pares: $Y \times Y$.

El diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y)\colon\ x,y \in Y\}.$$

La misma definición se puede escribir de manera más lenta, por pasos.

Primero formamos el conjunto de los pares: $Y \times Y$.

Denotamos por D_Y la imagen de este conjunto respecto la función d:

$$D_Y := d[Y \times Y], \qquad \text{esto es,} \qquad D_Y = \{d(x,y)\colon\ x,y \in Y\}.$$

El diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y):\ x,y \in Y\}.$$

La misma definición se puede escribir de manera más lenta, por pasos.

Primero formamos el conjunto de los pares: $Y \times Y$.

Denotamos por D_Y la imagen de este conjunto respecto la función d:

$$D_Y := d[Y \times Y], \qquad \text{esto es,} \qquad D_Y = \{d(x,y):\ x,y \in Y\}.$$

Finalmente, aplicamos el supremo:

$$\operatorname{diam}(Y) = \sup(D_Y).$$

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces

$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces

$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Idea de demostración: $b - a$ es el máximo del conjunto $D_{[a,b]}$.

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces
$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Idea de demostración: $b - a$ es el máximo del conjunto $D_{[a,b]}$.

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces
$$\operatorname{diam}((a, b)) = b - a.$$

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Entonces
$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Idea de demostración: $b - a$ es el máximo del conjunto $D_{[a,b]}$.

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces
$$\operatorname{diam}((a, b)) = b - a.$$

Idea de demostración: dado $\varepsilon > 0$, construir $x, y \in (a, b)$ tales que $y - x > b - a - \varepsilon$.

Ejemplo: una cota superior para el diámetro de una bola

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\operatorname{diam}(B(a,r)) \leq 2r.$$

Ejemplo: una cota superior para el diámetro de una bola

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) \leq 2r.$$

Demostración: ejercicio simple.

Ejemplo: una cota superior para el diámetro de una bola

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\operatorname{diam}(B(a,r)) \leq 2r.$$

Demostración: ejercicio simple.

Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$\operatorname{diam}(B(a,r)) < 2r.$$

Hay que encontrar X, $a \in X$, $r > 0$.

Monotonía del diámetro

Proposición

Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que

$$Z \subseteq Y.$$

Entonces

$$\operatorname{diam}(Z) \leq \operatorname{diam}(Y).$$

Conjuntos acotados

Definición

Sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es acotado si existe C en $[0, +\infty)$ tal que

$$\forall a, b \in Y \qquad d(a, b) \leq C.$$

Conjuntos acotados

Definición

Sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es acotado si existe C en $[0, +\infty)$ tal que

$$\forall a, b \in Y \qquad d(a, b) \leq C.$$

Ejercicio. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Y es acotado;

(b) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

Subconjuntos de conjuntos acotados son acotados

Proposición

Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que Y es acotado y $Z \subseteq Y$.

Entonces Z es acotado.

Criterio de conjunto acotado en términos de bolas

Proposición

Sea $Y \subseteq X$ y sea $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Y es acotado;

(b) existe $r > 0$ tal que $Y \subseteq B(a, r)$.

Criterio de conjunto acotado en términos de bolas, otra forma

Proposición

Sea $Y \subseteq X$ tal que $Y \neq \emptyset$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$;

(b) existen a en Y y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$;

(c) existen a en X y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$.

La unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado

Proposición

Sean Y, Z subconjuntos acotados de X. Entonces $Y \cup Z$ es acotado.

La unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado

Proposición

Sean Y, Z subconjuntos acotados de X. Entonces $Y \cup Z$ es acotado.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

La unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado

Proposición

Sean Y, Z subconjuntos acotados de X. Entonces $Y \cup Z$ es acotado.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

En lo que sigue, podemos suponer que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$.

Primera demostración

Fijamos $a \in Y$, $b \in Z$.

Primera demostración

Fijamos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles:

Caso 1: $p \in Y$, $q \in Y$;

Caso 2: $p \in Y$, $q \in Z$;

Caso 3: $p \in Z$, $q \in Y$;

Caso 4: $p \in Z$, $q \in Z$.

Primera demostración

Fijamos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles:

Caso 1: $p \in Y$, $q \in Y$;

Caso 2: $p \in Y$, $q \in Z$;

Caso 3: $p \in Z$, $q \in Y$;

Caso 4: $p \in Z$, $q \in Z$.

En cada caso, acotar $d(p, q)$ usando a y b (o solo uno de ellos) como puntos intermedios.

Primera demostración

Fijamos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles:

Caso 1: $p \in Y$, $q \in Y$;

Caso 2: $p \in Y$, $q \in Z$;

Caso 3: $p \in Z$, $q \in Y$;

Caso 4: $p \in Z$, $q \in Z$.

En cada caso, acotar $d(p, q)$ usando a y b (o solo uno de ellos) como puntos intermedios.

Mostrar que

$$\operatorname{diam}(Y \cup Z) \leq d(a, b) + \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z).$$

Segunda demostración

Usemos la notación

$$\operatorname{dist}(Y, Z) := \inf_{y \in Y, z \in Z} d(y, z).$$

Segunda demostración

Usemos la notación

$$\operatorname{dist}(Y, Z) := \inf_{y \in Y, z \in Z} d(y, z).$$

Dado $\varepsilon > 0$, aplicar la definición de inf.

Segunda demostración

Usemos la notación

$$\operatorname{dist}(Y, Z) := \inf_{y \in Y, z \in Z} d(y, z).$$

Dado $\varepsilon > 0$, aplicar la definición de inf.

Luego usar la desigualdad del triángulo o la desigualdad poligonal.

Segunda demostración

Usemos la notación

$$\operatorname{dist}(Y, Z) := \inf_{y \in Y, z \in Z} d(y, z).$$

Dado $\varepsilon > 0$, aplicar la definición de inf.

Luego usar la desigualdad del triángulo o la desigualdad poligonal.

Demostrar que

$$\operatorname{diam}(Y \cup Z) \leq \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z) + \operatorname{dist}(Y, Z).$$

Tercera demostración

Sea $a \in X$. Definimos

$$r_1 := \operatorname{dist}(a, Y) + \operatorname{diam}(Y), \qquad r_2 := \operatorname{dist}(a, Z) + \operatorname{diam}(Z), \qquad r_3 := r_1 + r_2.$$

Tercera demostración

Sea $a \in X$. Definimos

$$r_1 := \operatorname{dist}(a, Y) + \operatorname{diam}(Y), \qquad r_2 := \operatorname{dist}(a, Z) + \operatorname{diam}(Z), \qquad r_3 := r_1 + r_2.$$

Mostrar que para cada $\varepsilon > 0$,

$$Y \cup Z \subseteq B(a, r_3 + \varepsilon).$$

Tercera demostración

Sea $a \in X$. Definimos

$$r_1 := \mathrm{dist}(a, Y) + \mathrm{diam}(Y), \qquad r_2 := \mathrm{dist}(a, Z) + \mathrm{diam}(Z), \qquad r_3 := r_1 + r_2.$$

Mostrar que para cada $\varepsilon > 0$,

$$Y \cup Z \subseteq B(a, r_3 + \varepsilon).$$

Luego mostrar que

$$\mathrm{diam}(Y \cup Z) \leq 2r_3.$$