Formas sesquilineales acotadas

Objetivos. Definir el concepto de la norma extendida de la forma sesquilineal. Definir el concepto de forma sesqulineal acotada.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales en un espacio vectorial complejo, supremos e ínfimos, funcionales lineales acotados, la norma de un funcional lineal acotado.

Repaso: formas sesquilineales

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo no nulo. Suponemos que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

1 Definición (forma sesquilineal)**.** Una función $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ se llama *forma sesqulineal*, si es lineal con respecto al primer argumento y lineal conjugada con respecto al segundo argumento.

Ya hemos estudiado algunas propiedades algebraicas de formas sesquilineales. En particular, hemos demostrado que si $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y $u = 0_H$ o $v = 0_H$, entonces $f(u, v) = 0$.

También hemos demostrado que para cada forma sesquilineal se cumple la *identidad de polarización*:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, f(x + \mathrm{i}^k\, y, x + \mathrm{i}^k\, y). \tag{1}$$

La norma extendida de la forma sesquilineal

2 Definición (la norma extendida de una forma sesquilineal)**.** Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $N(f)$ mediante la siguiente regla:

$$N(f) \coloneqq \sup_{\substack{u \in H\setminus\{0_H\} \\ v \in H\setminus\{0_H\}}} \frac{|f(u, v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

3 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demostrar que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u,v)| \le N(f)\,\|u\|\,\|v\|.$$

4 Ejercicio. Demostrar que si $N(f) = 0$, entonces f es la función cero.

5 Ejercicio. Se $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesqulineal. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u\in H\colon\ \|u\|=1\\ v\in H\colon\ \|v\|=1}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

6 Ejercicio. Se $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u\in H\colon\ \|u\|\le 1\\ v\in H\colon\ \|v\|\le 1}} |f(u,v)|.$$

7 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demostrar que $N(f)$ es el mínimo del conjunto

$$\big\{C \in [0,+\infty] \colon \quad \forall u, v \in H \quad |f(u,v)| \le C\|u\|\,\|v\|\big\}.$$

Formas sesquilineales acotadas

8 Definición (forma sesquilineal acotada)**.** Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Se dice que f es *acotada*, si $N(f) < +\infty$.

9 Definición (el conjunto de las formas sesquilineales acotadas)**.** Denotamos por $\mathcal{S}(H)$ al conjunto de las formas sesquilineales acotadas $H^2 \to \mathbb{C}$. Para $f \in \mathcal{S}(H)$, denotamos $N(f)$ por $\|f\|$.

10 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Mostrar que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u,v)| \le \|f\|\,\|u\|\,\|v\|.$$

11 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal y sea $C \ge 0$. Supongamos que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u,v)| \le C\,\|u\|\,\|v\|.$$

Demostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \le C$.

12 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$ y sean $x, y \in H \setminus \{0_H\}$. Mostrar que
$$\|f\| \geq \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

13 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Tratamos H^2 como espacio vectorial normado con la norma
$$\|(u,v)\| \coloneqq \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}.$$
Mostrar que la función f es continua.

14 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Supongamos que f es continua en el punto $(0_H, 0_H)$. Demostrar que f es acotada.

15 Ejercicio. Mostrar que $\mathcal{S}(H)$ es un espacio normado. Denotamos por $0_{\mathcal{S}(H)}$ el cero de este espacio, es decir, la forma sesquilineal nula.

16 Ejercicio (la adjunta de una forma sesqulineal acotada)**.** Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $f^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:
$$f^*(u,v) \coloneqq \overline{f(v,u)}.$$
Demostrar que $f^* \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f^*\| = \|f\|$.

La norma de la forma sesquilineal en términos de los valores de la forma cuadrática

17 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadática inducida por f:
$$q_f(u) \coloneqq f(u,u).$$
Denotemos por $R(f)$ el siguiente número:
$$R(f) \coloneqq \sup_{u \in H\setminus\{0_H\}} \frac{|q_f(u)|}{\|u\|^2} = \sup_{u \in H\setminus\{0_H\}} \frac{|f(u,u)|}{\|u\|^2}$$
Mostrar que
$$R(f) \leq N(f).$$

18 Ejercicio. En la notación del ejercicio anterior, demostrar o refutar la siguiente conjetura: existe $C > 0$ tal que para cada forma sesquilineal f se cumple la desigualdad
$$N(f) \leq C\,R(f).$$