Ejemplos simples de transformaciones lineales acotadas (un tema del curso "Análisis funcional")

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

30 de octubre de 2020

Plan

1. Introducción
2. Ejemplos: operadores en ℓ^p
3. Ejemplos: matrices como operadores
4. Ejemplos: la proyección canónica

Objetivos y prerrequisitos

Objetivo: conocer varios ejemplos de transformaciones lineales acotadas, calcular o acotar sus normas.

Prerrequisitos:

- Criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.

Criterio de continuidad de una transf. lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) T es Lipschitz continua.

(b) T es uniformemente continua.

(c) T es continua.

(d) T es continua en el punto 0_V.

(e) $\sup\{\|Tx\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \le 1\} < +\infty$.

(f) $T(B_V(0,1))$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\exists C \ge 0 \qquad \forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V$.

La norma de una transformación lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\{C\in[0,+\infty]\colon \quad \forall x\in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x\in V \quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

Sean V, W espacios normados.

Sean V, W espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

Sean V, W espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

La norma de una transformación lineal acotada T se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

Sean V, W espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

La norma de una transformación lineal acotada T se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

Si T es acotada, entonces $\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \|T\|\,\|x\|_V.$

Ejercicio. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $a \in V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- T es continua en a,
- T es continua.

Ejercicio. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $a \in V$.
Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- T es continua en a,
- T es continua.

Ejercicio. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.
Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- T es continua,
- para cada conjunto X acotado en V, el conjunto $T[X]$ es acotado en W.

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (receta para demostrar una cota superior).

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \le 5\,\|v\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \le 5$.

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (receta para demostrar una cota superior).
Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \le 5\,\|v\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \le 5$.

Ejercicio (receta para demostrar una cota inferior).
Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y sea $u \in V$ tal que

$$\|Tu\|_W \ge 9\,\|u\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \ge 9$.

Plan

Ejemplo: operador de multiplicación en ℓ^p

Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty$ y sea $p \in [1, +\infty)$.

Definimos $M_a \colon \ell^p \to \ell^p$,

$$(M_a x)_k \coloneqq a_k x_k \qquad (x \in \ell^p,\ k \in \mathbb{N}).$$

En otras palabras,

$$M_a x \coloneqq (a_k x_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

$$M_a \colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \ldots).$$

Calcular $\|M_a\|$.

Operadores de desplazamiento en ℓ^p

Ejercicio. Definimos $L\colon \ell^p \to \ell^p$ y $R\colon \ell^p \to \ell^p$,

$$(Lx)_k \coloneqq x_{k+1}, \qquad (Rx)_k \coloneqq \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

Calcular $\|L\|$ y $\|R\|$. Mostrar que $LR = I$, $RL \neq I$.

Plan

Desigualdad de Schur para acotar la norma de matrices

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por $\|A\|$ la norma del operador lineal en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ asociado a esta matriz:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Pongamos

$$M_1 := \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}|, \qquad M_2 := \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{j,k}|.$$

Demostrar que

$$\|A\| \le \max\{M_1, M_2\}.$$

Sugerencia: usar la desigualdad de Hölder.

La norma matricial asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_1$

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Asociamos a la matriz A un operador lineal en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$.
Calcular la norma de este operador:

$$\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Plan

Operador de la proyección canónica

Ejercicio. En el espacio $V := \mathbb{C}^2$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$ consideramos el subespacio $W := \operatorname{lin}(a)$,

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $P\colon V \to V/W$,

$$P(x) := x + W.$$

Calcular $\|P\|$.

Sugerencia: dado un x en V, primero calcular $\|x + w\|$ para cada w en W, luego calcular $\|x + W\|$.

Operador de la proyección canónica

Ejercicio. En el espacio $c(\mathbb{N})$ dotado de la norma-supremo consideramos el subespacio $c_0(\mathbb{N})$.

Sea $P\colon c(\mathbb{N}) \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$,

$$P(x) \coloneqq x + c_0(\mathbb{N}).$$

Calcular $\|P\|$.

Sugerencia: calcular $\|x + c_0(\mathbb{N})\|$ para cada x en $c(\mathbb{N})$.