Funcionales lineales acotados

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

2 de diciembre de 2022

Plan

Objetivos

- Dado un espacio normado complejo V,
  repasar la definición del funcional lineal acotado $f\colon V \to \mathbb{C}$.
- Estudiar el concepto de hipersubespacio.
  Demostrar que si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal,
  entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio.
- Determinar, cuándo $\ker(f) = \ker(g)$.
- Demostrar que f es acotado $\Longleftrightarrow$ $\ker(f)$ es cerrado.

Prerrequisitos

- El criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.
- El espacio cociente de un espacio vectorial sobre un subespacio.
- El espacio cociente de un espacio normado sobre un subespacio cerrado.

En las clases pasadas hemos considerado el concepto de las
transformaciones lineales acotadas $V \to W$,
donde V y W son espacios normados complejos.

Podemos aplicar estos conceptos y resultados al caso particular, cuando

$$W = \mathbb{C}.$$

$\mathbb{C}$ se considera como un espacio normado.
La norma en $\mathbb{C}$ se define como el valor absoluto:

$$|z| := \sqrt{z\,\overline{z}}, \qquad |x + \mathrm{i}\,y| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Criterio de continuidad de un funcional lineal

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) f es acotado: $\quad \exists C \geq 0 \quad \forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\,\|x\|_V$.

(b) f es Lipschitz continuo.

(c) f es uniformemente continuo.

(d) f es continuo.

(e) f es continuo en el punto 0_V.

(f) $\sup\{|f(x)|\colon\ x \in V,\ \|x\|_V < 1\} < +\infty$, i.e., $f[B_V]$ es acotado.

(g) $\sup\{|f(x)|\colon\ x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\} < +\infty$, i.e., $f[\operatorname{clos}(B_V)]$ es acotado.

La norma de un funcional lineal

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal.

$$N_1(f) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} |f(x)|, \qquad N_2(f) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} |f(x)|, \qquad N_3(f) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V},$$

$$N_4(f) \coloneqq \inf\{C \in [0,+\infty]\colon \quad \forall x \in V \quad |f(x)| \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(f) = N_2(f) = N_3(f) = N_4(f)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(f)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \le N_4(f)\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V\to\mathbb{C}}$, $\|f\|_{\mathbb{C}\leftarrow V}$, $\|f\|_{V^*}$.

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V\to\mathbb{C}}$, $\|f\|_{\mathbb{C}\leftarrow V}$, $\|f\|_{V^*}$.

Si f es acotado, entonces $\quad \forall x \in V \qquad |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|_V.$

El espacio dual de un espacio normado

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ por V'.

El espacio dual de un espacio normado

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ por V'.

Operaciones lineales en V^*:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in V).$$

El espacio dual de un espacio normado

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ por V'.

Operaciones lineales en V^*:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in V).$$

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces V^* es de Banach.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Demostración. Sea

$$M := \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Entonces para cada x en $\mathbb{C}^n$ tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) \right| \le M \, \|x\|_2.$$

Sobre isomorfismos de espacios normados de dimensión finita

Ejercicio.

Sea V un espacio normado complejo de dimensión n
y sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.
Demostrar que T es un homeomorfismo.

Sobre isomorfismos de espacios normados de dimensión finita

Ejercicio.

Sea V un espacio normado complejo de dimensión n
y sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.
Demostrar que T es un homeomorfismo.

Sugerencia.

Usar el hecho que todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes entre si.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f : V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Idea de demostración.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Idea de demostración.

Construir un isomorfismo $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Idea de demostración.

Construir un isomorfismo $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$ y $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Idea de demostración.

Construir un isomorfismo $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$ y $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$.

Como $f \circ T$ es un funcional lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $f \circ T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

Proposición

Sea V un espacio normado de dimensión finita y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces f es acotado.

Idea de demostración.

Construir un isomorfismo $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$ y $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$.

Como $f \circ T$ es un funcional lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $f \circ T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

Como $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$, tenemos $f = (f \circ T) \circ T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$.

Plan

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V :\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W.$

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W, \quad$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W$.
- $V/W := \{a + W\colon\ a \in V\}$.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W.$
- $V/W := \{a + W\colon\ a \in V\}.$
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W, \quad \lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.$

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W.$
- $V/W \coloneqq \{a + W\colon\ a \in V\}.$
- $(a + W) + (b + W) \coloneqq (a + b) + W, \quad \lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) \coloneqq (\lambda a) + W.$
- V/W es un espacio vectorial complejo.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \iff \quad a - b \in W, \quad$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V:\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W.$
- $V/W := \{a + W:\ a \in V\}.$
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W, \quad \lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.$
- V/W es un espacio vectorial complejo.
- El vector cero de V/W es W.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Demostrar que cada elemento de $W + \mathbb{C}a$ tiene una representación única en forma

$$w + \lambda a, \quad \text{con} \quad w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sugerencia: suponer que $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$, con $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, y demostrar que $w_1 = w_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Demostrar que cada elemento de $W + \mathbb{C}a$ tiene una representación única en forma

$$w + \lambda a, \quad \text{con} \quad w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sugerencia: suponer que $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$, con $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, y demostrar que $w_1 = w_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

En otras palabras, $W + \mathbb{C}a$ es la suma directa de W y $\mathbb{C}a$.

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

Cuando W tiene una de estas propiedades, se dice que W es un hipersubespacio o subespacio de codimensión 1.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \mathrm{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Sea $x \in V$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.
Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.
Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.
Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.
Sea $x \in V$. Como $x + W \in V/W = \operatorname{lin}(A)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x + W = \lambda a + W$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.
Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.
Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.
Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.
Sea $x \in V$. Como $x + W \in V/W = \operatorname{lin}(A)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x + W = \lambda a + W$.
Esto implica que $x - \lambda a \in W$, $x \in W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.
Entonces existen $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x = w + \lambda a$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.
Entonces existen $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x = w + \lambda a$.
Luego $x \in \lambda a + W$, esto es, $X = \lambda a + W = \lambda(a + W)$.

Si $f : V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Obviamente,

$$f = 0_{V\to\mathbb{C}} \qquad \iff \qquad \ker(f) = V.$$

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\,a.$$

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w \coloneqq x - \frac{f(x)}{f(a)}\,a.$$

Entonces $f(w) = 0$,

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w \coloneqq x - \frac{f(x)}{f(a)}\,a.$$

Entonces $f(w) = 0$, $w \in W$,

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w \coloneqq x - \frac{f(x)}{f(a)}\,a.$$

Entonces $f(w) = 0$, $w \in W$, $x = w + \frac{f(x)}{f(a)}\,a \in W + \mathbb{C}a$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.
Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Dado x en V, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.
Pongamos $f(x) := \lambda$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.
Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Dado x en V, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.
Pongamos $f(x) := \lambda$.

Es fácil ver que f es lineal y que $\ker(f) = W$.

Plan

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $f, g \colon V \to \mathbb{C}$ funcionales lineales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe c en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = cf$.

(b) $\ker(f) = \ker(g)$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $f, g\colon V \to \mathbb{C}$ funcionales lineales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe c en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = cf$.

(b) $\ker(f) = \ker(g)$.

La implicación (a)$\Longrightarrow$(b) es trivial.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Demostración (b)⇒(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$c := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$c := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos $\ker(f) = \ker(g)$. Lo denotamos por W.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$\boxed{c := \frac{g(a)}{f(a)}.}$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Entonces

$$g(x) = g(w + \lambda a) = \lambda g(a) = \lambda c f(a) = c f(w + \lambda a) = c f(x).$$

Plan

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \qquad \iff \qquad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación $\implies$ es trivial porque

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \quad \iff \quad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación $\Longrightarrow$ es trivial porque

$$\ker(f) = f^{-1}[\{0\}],$$

y el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W \coloneqq \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W \coloneqq \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r \coloneqq d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a),$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda|\, r,$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda| \, r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda|\, r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

En el caso $\lambda = 0$, la desigualdad también se cumple.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q \colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.

Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.
Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.
Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.
Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Consideramos $g := A \circ Q$. Tenemos $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ y

$$\ker(g) = \{x \in V:\quad x + W = W\} = W.$$

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.
Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.
Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.
Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Consideramos $g := A \circ Q$. Tenemos $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ y

$$\ker(g) = \{x \in V : \quad x + W = W\} = W.$$

Como $\ker(f) = \ker(g)$, existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f = cg$. Luego $f \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$.

Ejemplos de funcionales lineales no acotados

Ejercicio.

Aceptemos como un hecho que cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.

Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Verificar que $\ker(f)$ es un hipersubespacio no es cerrado.

Ejemplos de funcionales lineales no acotados

Ejercicio.
Aceptemos como un hecho que cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.
Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.
Verificar que $\ker(f)$ es un hipersubespacio no es cerrado.

Ejercicio.
Sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no acotado.
Demostrar que el subespacio $\ker(f)$ es denso en V.