Funcionales lineales acotados y sus núcleos

(un tema de la unidad “Transformaciones lineales acotadas”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)

Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de diciembre de 2022

1. Introducción y repaso
2. ¿Cuándo $\ker(f) = \ker(g)$?
3. f es acotado $\iff \ker(f)$ es cerrado

Plan

Objetivos

- Dados dos funcionales lineales no nulos $f, g\colon V \to \mathbb{C}$, demostrar que

$$f, g \text{ son linealmente dependientes} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \ker(g).$$

- Dado un espacio normado complejo V y un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$, demostrar que

$$f \text{ es continuo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado}.$$

Prerrequisitos

- El criterio de continuidad de funcionales lineales.
- El espacio cociente de un espacio vectorial sobre un subespacio.
- El espacio cociente de un espacio normado sobre un subespacio cerrado.
- Hipersubespacios de espacios vectoriales.

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

Sabemos que f es acotado $\iff$ f es continuo.

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

Sabemos que f es acotado $\iff$ f es continuo.

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Funcionales lineales acotados

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

Sabemos que f es acotado $\iff$ f es continuo.

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Sea V un espacio normado complejo. Su espacio dual se define como $V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$.

Hipersubespacios (repaso)

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio vectorial de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\dim(V/W) = 1$;

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$;

(c) existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $W = \ker(f)$.

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w)$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) =$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right)$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a\right) =$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos
$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces
$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a)$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) =$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\,f(a) = 0.$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) = 0.$$

Por lo tanto,

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) = 0.$$

Por lo tanto, $w \in \ker(f) = W$ y

$$v$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\,a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\,f(a) = 0.$$

Por lo tanto, $w \in \ker(f) = W$ y

$$v =$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) = 0.$$

Por lo tanto, $w \in \ker(f) = W$ y

$$v = v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a + \frac{f(v)}{f(a)}\, a$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w \coloneqq v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) = 0.$$

Por lo tanto, $w \in \ker(f) = W$ y

$$v = v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a + \frac{f(v)}{f(a)}\, a \in$$

Repaso de una parte de demostración

Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no nulo y $W = \ker(f)$.

Elegimos a en $V \setminus W$.

Dado v en V, pongamos

$$w := v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a.$$

Entonces

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(a)}\, f(a) = 0.$$

Por lo tanto, $w \in \ker(f) = W$ y

$$v = v - \frac{f(v)}{f(a)}\, a + \frac{f(v)}{f(a)}\, a \in W + \mathbb{C}a.$$

Criterio de funcional lineal nulo

Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Criterio de funcional lineal nulo

Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Obviamente,

$$f = 0_{V\to\mathbb{C}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = V.$$

Plan

1. Introducción y repaso
2. ¿Cuándo $\ker(f) = \ker(g)$?
3. f es acotado $\iff \ker(f)$ es cerrado

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $f, g\colon V \to \mathbb{C}$ funcionales lineales.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe ξ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = \xi f$.

(b) $\ker(f) = \ker(g)$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $f, g\colon V \to \mathbb{C}$ funcionales lineales.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe ξ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = \xi f$.

(b) $\ker(f) = \ker(g)$.

La implicación (a)$\Longrightarrow$(b) es trivial.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$,

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$,

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$.

Demostración (b)⇒(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$\xi := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$\boxed{\xi := \frac{g(a)}{f(a)}.}$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Demostración (b)$\Rightarrow$(a)

Suponemos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W := \ker(f)$.

Si $f = 0_{V \to \mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V \to \mathbb{C}}$.

Suponemos $f \neq 0_{V \to \mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$.
Entonces $V = W + \mathbb{C}a$, $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$\xi := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Entonces

$$g(x) = g(w + \lambda a) = \lambda g(a) = \lambda \xi f(a) = \xi f(w + \lambda a) = \xi f(x).$$

Plan

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación $\Longrightarrow$ es trivial porque

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \text{ es acotado} \quad \iff \quad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación $\Longrightarrow$ es trivial porque

$$\ker(f) = f^{-1}[\{0\}],$$

y el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W),$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,}$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x)$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) =$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a)$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) =$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a),$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\|$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| =$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\|$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| =$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\|$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda| \, r,$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda|\, r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

Demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$.

$$r := d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda|\, r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

En el caso $\lambda = 0$, la desigualdad también se cumple.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.
Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.
Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.

Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.

Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.

Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.
Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.
Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.
Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Consideramos $g := A \circ Q$. Tenemos $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ y

$$\ker(g) = \{x \in V\colon \quad x + W = W\} = W.$$

Otra demostración de $\Longleftarrow$

Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$.
Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$.
Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo.
Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Consideramos $g := A \circ Q$. Tenemos $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ y

$$\ker(g) = \{x \in V\colon \quad x + W = W\} = W.$$

Como $\ker(f) = \ker(g)$, existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f = cg$. Luego $f \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$.

Ejemplos de funcionales lineales no acotados

Ejercicio.

Aceptemos el siguiente hecho (que se puede demostrar usando el lema de Zorn):
cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.

Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Verificar que $\ker(f)$ no es cerrado.

Ejemplos de funcionales lineales no acotados

Ejercicio.

Aceptemos el siguiente hecho (que se puede demostrar usando el lema de Zorn): cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.

Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Verificar que $\ker(f)$ no es cerrado.

Ejercicio.

Sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no acotado.

Demostrar que el subespacio $\ker(f)$ es denso en V.