La frontera de un conjunto en un espacio métrico

1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Sea $A \subseteq X$. Definimos la *frontera* de A (respecto la métrica d) mediante la regla:

$$\mathrm{fr}_d(A) \coloneqq \mathrm{cl}_d(A) \setminus \mathrm{int}_d(A).$$

En lo que sigue, fijamos el espacio métrico (X, d) y escribimos simplemente cl, int y fr. Algunos autores en vez de $\mathrm{fr}(A)$ utilizan la notación $\partial(A)$ o $\mathrm{bd}(A)$.

Las propiedades de la frontera se obtienen de las propiedades de la cerradura y del interior.

2 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Mostrar que $\mathrm{fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X \setminus A)$.

3 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Mostrar que

$$x \in \mathrm{fr}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall r > 0 \qquad B(x, r) \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad B(x, r) \setminus A \neq \varnothing.$$

Usamos la notación τ_d o simplemente τ para la topología inducida por la métrica d. Dado x en X, usamos la notación $\tau(x)$ para el colección de todas las vecindades abiertas del punto x. En otras palabras,

$$\tau(x) \coloneqq \{V \in \tau\colon\ x \in V\}.$$

4 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Mostrar que

$$x \in \mathrm{fr}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall V \in \tau(x) \qquad V \cap A \neq \varnothing \quad \wedge \quad V \setminus A \neq \varnothing.$$

5 Ejercicio. Consideremos el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica común. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Encontrar $\mathrm{fr}(A)$ para cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{l} \varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad \{a\}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \\ (a, +\infty), \qquad [a, +\infty), \qquad (-\infty, b), \qquad (-\infty, b], \\ (a, b), \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad [a, b]. \end{array}$$

6 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demostrar que $\mathrm{fr}(A)$ es un conjunto cerrado.

7 Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demostrar que A es cerrado si, y solo si, $\mathrm{fr}(A) \subseteq A$.

8 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces* $\mathrm{fr}(\mathrm{fr}(A)) \subseteq \mathrm{fr}(A)$.

Demostración en términos de cerraduras. Notemos que el conjunto $\operatorname{fr}(A)$ es cerrado, por ser la intersección de los conjuntos cerrados $\operatorname{cl}(A)$ y $\operatorname{cl}(X \setminus A)$. Luego $\operatorname{cl}(\operatorname{fr}(A)) = \operatorname{fr}(A)$. Por eso

$$\operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A)) = \operatorname{cl}(\operatorname{fr}(A)) \cap \operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{fr}(A)) \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{fr}(A)) = \operatorname{fr}(A). \qquad \square$$

Demostración en términos de bolas. Sea $x \in \operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A))$. Mostremos que $x \in \operatorname{fr}(A)$. Utilicemos el criterio del Ejercicio 3. Sea $r > 0$. Como $x \in \operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A))$, la intersección $B(x, r) \cap \operatorname{fr}(A)$ no es vacía. Por eso existe y en $\operatorname{fr}(A)$ tal que $d(x, y) < r$. Pongamos $r_1 \coloneqq r - d(x, y)$.

Usando la condición que $y \in \operatorname{fr}(A)$, encontramos a en A tal que $d(y, a) < r_1$. Luego $d(x, a) < r$. Hemos mostrado que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Por otro lado, usando la condición que $y \in \operatorname{fr}(A)$, encontramos b en $X \setminus A$ tal que $d(y, b) < r_1$. Luego $d(x, b) < r$. Hemos mostrado que $B(x, r) \setminus A \neq \varnothing$. $\square$

9 Ejercicio. Construir un ejemplo cuando $\operatorname{fr}(\operatorname{fr}(A)) \neq \operatorname{fr}(A)$.

10 Ejercicio. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que $\operatorname{fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$.

11 Ejercicio. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que $\operatorname{fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$.