El espacio bidual del espacio normado
(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

10 de mayo de 2022

Objetivos.

- Dado un espacio normado V, construir una isometría lineal $V \to V^{**}$.
- Conocer el concepto de espacios reflexivos.
- Usando el encaje construido, conocer una completación de V.
- Demostrar que los conjuntos débilmente acotados en V son acotados.

Objetivos.

- Dado un espacio normado V, construir una isometría lineal $V \to V^{**}$.
- Conocer el concepto de espacios reflexivos.
- Usando el encaje construido, conocer una completación de V.
- Demostrar que los conjuntos débilmente acotados en V son acotados.

Prerrequisitos.

- El espacio dual del espacio normado.
- Descripción de los espacios duales de los espacios c_0 y ℓ^p, $1 \le p < +\infty$.
- El teorema de Hahn–Banach y sus corolarios.
- El principio de acotación uniforme.

1. Repaso: el espacio dual del espacio normado
2. El espacio bidual
3. El encaje natural del espacio normado en su espacio bidual

Plan

1. Repaso: el espacio dual del espacio normado
2. El espacio bidual
3. El encaje natural del espacio normado en su espacio bidual

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f + g)(v) :=$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* \coloneqq \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f + g)(v) \coloneqq f(v) + g(v),$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* \coloneqq \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f+g)(v) \coloneqq f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) \coloneqq$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* \coloneqq \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f+g)(v) \coloneqq f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) \coloneqq \lambda f(v).$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* \coloneqq \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f+g)(v) \coloneqq f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) \coloneqq \lambda f(v).$$

La norma en V^* se define como

$$\|f\| \coloneqq$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) := \lambda f(v).$$

La norma en V^* se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} |f(v)|.$$

El espacio dual del espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio dual de V se define como el espacio de los funcionales lineales acotados:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

V^* se considera con las operaciones lineales

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v), \qquad (\lambda f)(v) := \lambda f(v).$$

La norma en V^* se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \le 1}} |f(v)|.$$

V^* es un espacio de Banach.

Plan

El espacio bidual

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio bidual

Sea V un espacio normado complejo.

El espacio bidual de V es

$$V^{**} := (V^*)^*,$$

esto es,

$$V^{**} := \mathcal{B}(\mathcal{B}(V, \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Ejemplo: el espacio bidual de ℓ^p, $1 < p < +\infty$

Sea $p \in (1, +\infty)$ y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ejemplo: el espacio bidual de ℓ^p, $1 < p < +\infty$

Sea $p \in (1, +\infty)$ y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sabemos que $(\ell^p) \cong \ell^q$.

Ejemplo: el espacio bidual de ℓ^p, $1 < p < +\infty$

Sea $p \in (1, +\infty)$ y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sabemos que $(\ell^p) \cong \ell^q$.

Luego $(\ell^p)^{**} \cong (\ell^q) \cong \ell^p$.

Ejemplo: el espacio bidual de c_0

Sabemos que $(c_0)^* \cong \ell^1$.

Ejemplo: el espacio bidual de c_0

Sabemos que $(c_0)^* \cong \ell^1$.

Luego $(c_0)^{**} \cong (\ell^1)^* \cong \ell^\infty$.

Ejemplo: el espacio bidual de c_{fin}

Denotemos por c_{fin} al espacio de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\mathrm{fin}} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq m \quad a_k = 0 \right\}.$$

Consideramos c_{fin} como subespacio de ℓ^∞.

Ejemplo: el espacio bidual de c_{fin}

Denotemos por c_{fin} al espacio de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\mathrm{fin}} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq m \quad a_k = 0 \right\}.$$

Consideramos c_{fin} como subespacio de ℓ^{∞}.

Se puede demostrar que $c_{\mathrm{fin}}^* \cong \ell^1$.

Ejemplo: el espacio bidual de c_{fin}

Denotemos por c_{fin} al espacio de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\mathrm{fin}} := \left\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq m \quad a_k = 0\right\}.$$

Consideramos c_{fin} como subespacio de ℓ^∞.

Se puede demostrar que $c_{\mathrm{fin}}^* \cong \ell^1$.

Por lo tanto, $c_{\mathrm{fin}}^{**} \cong \ell^\infty$.

Plan

El elemento del espacio bidual asociado a un vector

Sea V un espacio normado complejo.

El elemento del espacio bidual asociado a un vector

Sea V un espacio normado complejo.

Definición

Dado a en V, definimos $\psi_a \colon V^* \to \mathbb{C}$,

$$\psi_a(f) := f(a).$$

El elemento del espacio bidual asociado a un vector

Sea V un espacio normado complejo.

Definición

Dado a en V, definimos $\psi_a\colon V^* \to \mathbb{C}$,

$$\psi_a(f) := f(a).$$

Proposición

Sea $a \in V$. Entonces $\psi_a \in V^{**}$ y $\|\psi_a\| = 1$.

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f + g)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f + g) = (f + g)(a)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) = (\lambda f)(a)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) = (\lambda f)(a) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) = (\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) = (\lambda f)(a) = \lambda f(a) =$$

Demostración, ψ_a es lineal

Verifiquemos que ψ_a es lineal.

Usemos la definición de operaciones lineales en V^*.

Dados $f, g \in V^*$,

$$\psi_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \psi_a(f) + \psi_a(g).$$

Dados $f \in V^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\psi_a(\lambda f) = (\lambda f)(a) = \lambda f(a) = \lambda \psi_a(f).$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)|$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| =$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| = |f(a)|$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| = |f(a)| \leq$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| \;=\; |f(a)| \;\leq\; \|f\|_{V^*} \, \|a\|_V$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_{V^*} \|a\|_V =$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_{V^*} \|a\|_V = \|a\| \|f\|.$$

Demostración, ψ_a es acotado y $\|\psi_a\| \leq \|a\|$

Para cada f en V^*,

$$|\psi_a(f)| \;=\; |f(a)| \;\leq\; \|f\|_{V^*}\,\|a\|_V \;=\; \|a\|\,\|f\|.$$

Esto implica que ψ_a es acotado y

$$\|\psi_a\| \;\leq\; \|a\|.$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\|$$

Demostración, $\|\psi_a\| \ge \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \ne 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| \ =$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| = \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)|$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| = \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \geq$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| \;=\; \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \;\geq\; |\psi_a(g)|$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| \;=\; \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \;\geq\; |\psi_a(g)| \;=$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| = \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \geq |\psi_a(g)| = |g(a)|$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| \;=\; \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \;\geq\; |\psi_a(g)| \;=\; |g(a)| \;=$$

Demostración, $\|\psi_a\| \geq \|a\|$

Si $a = 0_V$, entonces $\psi_a = 0_{V^* \to \mathbb{C}}$ y $\|\psi_a\| = 0$.

Consideremos el caso principal, cuando $a \neq 0_V$.

Por un corolario del teorema de Hahn–Banach, existe $g \in V^*$ tal que

$$\|g\| = 1, \qquad g(a) = \|a\|.$$

Luego

$$\|\psi_a\| \;=\; \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\| \leq 1}} |\psi_a(f)| \;\geq\; |\psi_a(g)| \;=\; |g(a)| \;=\; \|a\|.$$

El encaje canónico $\Psi\colon V \to V^{**}$

Definimos $\Psi\colon V \to V^{**}$,

$$\Psi(a) := \psi_a.$$

El encaje canónico $\Psi\colon V \to V^{**}$

Definimos $\Psi\colon V \to V^{**}$,

$$\Psi(a) := \psi_a.$$

Proposición

Ψ es una isometría lineal.

El encaje canónico $\Psi\colon V \to V^{**}$

Definimos $\Psi\colon V \to V^{**}$,

$$\Psi(a) := \psi_a.$$

Proposición

Ψ es una isometría lineal.

Demostración.

Ya sabemos que Ψ preserva la norma.

Se queda como un ejercicio demostrar que Ψ es lineal.

Espacios reflexivos

Definición

Sea V un espacio normado complejo. Se dice que V es reflexivo si $\Psi[V] = V^{**}$.

Ejemplos.

- ℓ^p con $1 < p < +\infty$ es reflexivo.
- c_0 no es reflexivo.

$\operatorname{clos}(\Psi[V])$ es una completación de V

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo. Pongamos

$$W := \operatorname{clos}(\Psi[V]).$$

Mostrar que W es una completación de V.

- V^{**} es completo;
- W es completo;
- Ψ es una isometría y $\Psi[V]$ es denso en W.

$\operatorname{clos}(\Psi[V])$ es una completación de V

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo. Pongamos

$$W := \operatorname{clos}(\Psi[V]).$$

Mostrar que W es una completación de V.

- V^{**} es completo;
- W es completo;
- Ψ es una isometría y $\Psi[V]$ es denso en W.

Otra receta para construir una completación de V:
un espacio cociente del espacio de las sucesiones de Cauchy.

Conjuntos de vectores débilmente acotados

Definición

Sea $X \subseteq V$. Se dice que X es débilmente acotado, si

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{v \in X} |f(v)| < +\infty.$$

Conjuntos de vectores débilmente acotados

Definición

Sea $X \subseteq V$. Se dice que X es débilmente acotado, si

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{v \in X} |f(v)| < +\infty.$$

En otras palabras, X es débilmente acotado,
si para cada f en V^* el conjunto $f[X]$ es acotado en $\mathbb{C}$.

Conjuntos de vectores débilmente acotados

Definición

Sea $X \subseteq V$. Se dice que X es débilmente acotado, si

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{v \in X} |f(v)| < +\infty.$$

En otras palabras, X es débilmente acotado,
si para cada f en V^* el conjunto $f[X]$ es acotado en $\mathbb{C}$.

Ejercicio simple. Sea $X \subseteq V$. Supongamos que X es acotado: $\sup_{v \in X} \|v\| < +\infty$. Demostrar que X es débilmente acotado.

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq$

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.
Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq V^{*} =$

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq V^* = \mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq V^* = \mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.
- Mostrar que la colección $\mathcal{F}$ es acotada en cada punto de V^*:

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{T \in \mathcal{F}} |T(f)| < +\infty.$$

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.
Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq V^* = \mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.
- Mostrar que la colección $\mathcal{F}$ es acotada en cada punto de V^*:

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{T \in \mathcal{F}} |T(f)| < +\infty.$$

- Por el principio de acotación uniforme, $\mathcal{F}$ es acotado en $\mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.

Cada conjunto débilmente acotado es acotado

Problema. Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.
Supongamos que X es débilmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Idea de solución.

- Consideremos $\mathcal{F} := \Psi[X]$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq V^{**} = \mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.
- Mostrar que la colección $\mathcal{F}$ es acotada en cada punto de V^*:

$$\forall f \in V^* \qquad \sup_{T \in \mathcal{F}} |T(f)| < +\infty.$$

- Por el principio de acotación uniforme, $\mathcal{F}$ es acotado en $\mathcal{B}(V^*, \mathbb{C})$.
- Como Ψ es una isometría, X es acotado en V.